Prof. Dr. Martin Oellrich
BHT Berlin
SS 2010

Mathematik II
für Medieninformatiker

Inhaltsverzeichnis

Index

6 Mengenlehre

→ *Die Folgerungen aus Aussagen- und Prädikatenlogik sind zahlreich. Dies ist eine davon.*

6.1 Begriff der Menge

1. Eine **Menge** ist eine *Zusammenfassung unterscheidbarer Objekte zu einem Ganzen*.[15] Diese Objekte heißen **Elemente** der Menge.

   Die Unterscheidbarkeit impliziert, dass eine Menge keine gleichen Objekte enthält.

2. Mengen werden mit lateinischen Großbuchstaben bezeichnet, Elemente mit kleinen. Ist Objekt a Element einer Menge A, schreiben wir $\boxed{a \in A}$, sonst $\boxed{a \notin A}$ $:\Leftrightarrow \ \neg(a \in A)$.

   Die charakteristische Eigenschaft einer Menge ist die Bereitstellung ihres Elementprädikats. → *Das ist schon alles. Mehr „kann“ eine Menge im Grunde nicht.*

3. Die Menge ohne Elemente heißt **leere Menge** und hat das Symbol $\boxed{\varnothing}$. Formal: $\forall x: \ (x \in \varnothing \leftrightarrow 0)$, bzw. kürzer: $x \in \varnothing \ \Leftrightarrow \ 0$.

   Es gibt nur eine einzige leere Menge, egal welche Objekte wir als darin nicht enthalten ansehen!

6.2 Darstellung von Mengen

Es gibt vier Möglichkeiten, eine Menge anzugeben. In allen Fällen muss klar sein, wie das Elementprädikat entschieden wird.

1. **explizite Aufzählung**, Beispiele:

$$\{\text{Beuth, Gauß, Grashof, Bauwesen}\}$$
$$\{\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow, \oplus, |, \downarrow\}$$
$$V := \{\text{a, e, i, o, u}\} .$$

   Das Elementprädikat kann durch eine Suche bereit gestellt werden:

   <u>***isin***</u>(y, A)
   Input: Objekt y, Menge A
   Output: Wahrheitswert des Prädikats $y \in A$

   for $x \in A$ **do** $\{ A$ aufzählen $\}$
   if $x = y$ **then**
   return *true*

   return *false*

[15] dies ist die Definition von Georg Cantor, 1845–1918, deutscher Mathematiker, Begründer der modernen Mengenlehre

Dieser Algorithmus entspricht der mathematischen Definition

$$\boxed{y \in A \ :\Leftrightarrow \ \exists x \in A : y = x} .$$

Das Elementprädiakt „$\in$“ wird *delegiert* an das Gleichheitsprädikat „=“, das für die betrachteten Objekte definiert sein muss.

2. **implizite Aufzählung**, Beispiele:

$$\{\text{Ananas, Banane, \ldots, Zitrone}\}$$
$$\{1, 2, \ldots, n\}$$
$$QZ := \{1, 4, 9, 16, \ldots\} .$$

   Achtung: die Fortsetzung „. . .“ muss eindeutig sein oder zumindest klar erkennbar → Kontext wichtig! Das obere Beispiel ist schlecht, weil mehrdeutig. Implizite Aufzählung ist meistens nur sinnvoll bei Mengen mathematischer Objekte, siehe untere Beispiele.

   Während die explizite Aufzählung nur für *endliche* Mengen geeignet ist, kann bei der impliziten die in den „. . .“ versteckte Regel eine *unendlich große* Menge erzeugen, siehe QZ. → *Mehr zu Mengengrößen in Kapitel* **??**.

   Das Elementprädikat wird berechnet, indem wir diesen Darstellungstyp auf den nächsten, die Beschreibung, zurück führen. Dazu müssen wir die implizite Regel als ein Prädikat ausdrücken.

3. **Beschreibung**, Beispiele:

$$V = \{x \in \{\text{a, b, c, \ldots, z}\} \mid x \text{ ist Vokal}\}$$
$$QZ = \{n \in \mathbb{N} \mid \sqrt{n} \in \mathbb{N}\} .$$

   Diese Darstellung ist geeignet für Mengen A, die Teil einer bereits vorhandenen **Grundmenge** G (auch *Kontext*) sind, über der ein Prädikat $a(x)$ definiert ist:

$$A = \{ \underbrace{x \in G}_{\text{Grundmenge}} \mid \underbrace{a(x)}_{\text{Prädikat}} \} .$$

   Die Grundmenge steht links, getrennt durch einen senkrechten Strich vom Prädikat. Die Menge A entsteht, indem die Grundmenge durch das Prädikat „gefiltert“ wird wie bei einer Datenbankabfrage. Das Elementprädikat von A wird dadurch zurückgeführt auf das in G und das gegebene Prädikat:

$$y \in A \ :\Leftrightarrow \ (y \in G) \wedge a(y) .$$

   Ist die Grundmenge G klar oder unwichtig, kann Sie weggelassen werden, z.B. $V = \{x \mid x \text{ ist Vokal}\}$. Der Elementname ist aber wichtig, damit das Prädikat formuliert werden kann. Er ist eine *gebundene* Variable, vgl. **??**.

Im Weiteren sei G jeweils klar, sodass wir für $A = \{x \in G \mid a(x)\}$ vereinfacht annehmen können:

$$\boxed{y \in A \;:\Leftrightarrow\; a(y)}\;.$$

Hier wird das Elementprädikat delegiert an das innere Prädikat a.

4. **Konstruktion** der Elemente, Beispiele:

$$\begin{aligned} QZ &= \{n^2 \mid n \in \mathbb{N}\} \\ \mathbb{Q} &:= \{\tfrac{p}{q} \mid p \in \mathbb{Z},\, q \in \mathbb{N}\} \qquad \text{(rationale Zahlen)}\,. \end{aligned}$$

Hier steht links ein Bildungsgesetz für die Elemente und rechts eine (oder mehrere) Mengen zur Aufzählung der *gebundenen* Variablen darin:

$$A := \{\; \underbrace{f(x)}_{\text{Konstruktionsformel}} \;\mid\; \underbrace{x \in G}_{\text{Grundmenge}} \;\}\,.$$

A entsteht als Menge der Ergebnisse der Formel f, in die alle Elemente von G einmal eingesetzt werden. Dabei dürfen dieselben Ergebnisse auch mehrfach erzeugt werden, wie bei $\mathbb{Q}$, wo jeder Bruchwert sogar unendlich oft heraus kommt. Sie zählen aber nur einmal als Elemente.

Das Elementprädikat einer konstruierten Menge hat die Form eines quantifizierten *Existenzausdrucks* wie bei der expliziten Aufzählung, nur dass das Element indirekt durch f gegeben ist:

$$\boxed{y \in A \;:\Leftrightarrow\; \exists x \in G : y = f(x)}\;.$$

Für die Beispielmengen:

$$\begin{aligned} m \in QZ &\Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N} : m = n^2 \\ y \in \mathbb{Q} &\Leftrightarrow \exists p \in \mathbb{Z} : \exists q \in \mathbb{N} : y = \tfrac{p}{q}\,. \end{aligned}$$

Darstellungen von Mengen sind nicht eindeutig. Sie können ggf. ineinander überführt werden. Beispiel Quadratzahlen:

$$QZ = \{1, 4, 9, 16, \ldots\} = \{n \in \mathbb{N} \mid \sqrt{n} \in \mathbb{N}\} = \{n^2 \mid n \in \mathbb{N}\}\,.$$

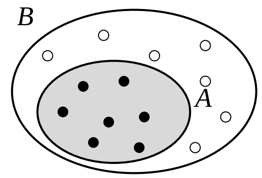
6.3 Verknüpfung von Mengen

Operationen zwischen Mengen leiten sich direkt aus der Prädikatenlogik her. Sie können veranschaulicht werden mit Hilfe eines **Venn-Diagramms**[16], s.u. Wir setzen eine gemeinsame Grundmenge G für A, B voraus und schreiben sie nicht explizit auf.

[16] John Venn, 1834–1923, britischer Mathematiker

1. **Teilmenge**:

   jedes Element von A liegt in B:



$$\begin{aligned} &\boxed{A \subseteq B \;:\Leftrightarrow\; \forall x : (x \in A \rightarrow x \in B)} \\ &\Leftrightarrow \quad (x \in A \;\Rightarrow\; x \in B)\,. \end{aligned}$$

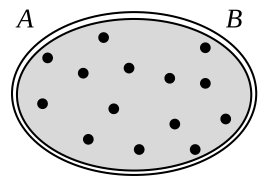
Beispiel:

$$\begin{aligned} A &:= \{x \text{ Hochschule} \mid x \text{ steht in Deutschland}\} \\ B &:= \{x \text{ Hochschule} \mid x \text{ steht in Berlin}\} \\ C &:= \{x \text{ Hochschule} \mid x \text{ steht in Wedding}\}\,. \end{aligned}$$

Also:

$$(\,(x \text{ in Wedding}) \;\Rightarrow\; (x \text{ in Berlin}) \;\Rightarrow\; (x \text{ in Deuschland})\,) \;\Leftrightarrow\; C \subseteq B \subseteq A\,.$$

2. **Gleichheit** zweier Mengen:
   jedes Element liegt in A und B oder keiner von beiden:



$$\begin{aligned} &\boxed{A = B \;:\Leftrightarrow\; \forall x : (x \in A \leftrightarrow x \in B)} \\ &\Leftrightarrow \quad (x \in A \;\Leftrightarrow\; x \in B)\,. \end{aligned}$$

Beispiel:

$$\begin{aligned} A &:= \{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ gerade}\} \\ B &:= \{n \in \mathbb{N} \mid n^2 \text{ gerade}\}\,. \end{aligned}$$

Es ist $A = B$, weil

$$n \in A \;\Leftrightarrow\; (n \text{ gerade}) \;\overset{??.??}{\Leftrightarrow}\; (n^2 \text{ gerade}) \;\Leftrightarrow\; n \in B\,.$$

Durch diese Definition von Gleichheit ist jedes Element nur einmal in einer Menge vorhanden und die Reihenfolge ist egal:

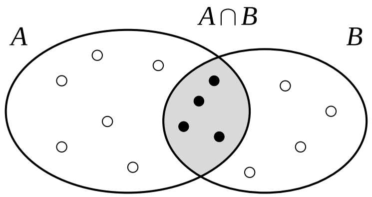
$$\{\text{ ich, du, ich, du }\} = \{\text{ ich, du }\} = \{\text{ du, ich }\}\,.$$

$\longrightarrow$ *Wenden Sie dazu das Elementprädikat für explizit aufgezählte Mengen an.*

Im Grunde ist eine Menge eine *black box*, die nur Ja/Nein-Fragen nach ihrem Inhalt beantworten kann. Dadurch können wir „von außen“ nicht sehen, wie oft Elemente enthalten sind und in welcher Reihenfolge. Wir stellen uns einfach vor, alle Elemente seien nur einmal vorhanden und es gibt keine Reihenfolge.

3. **Schnittmenge** zweier Mengen, lies: *„geschnitten“*.

$$\boxed{A \cap B := \{\, x \mid x \in A \wedge x \in B \,\}}\ .$$



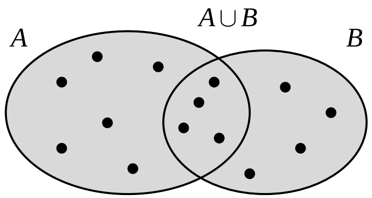
Beispiel:

$$\begin{aligned} A &:= \{\, x \mid x \text{ Hochschule} \,\} \\ B &:= \{\, x \mid x \text{ Berliner Ausbildungsstätte} \,\} \\ A \cap B &= \{\, x \mid x \text{ Berliner Hochschule} \,\}\ . \end{aligned}$$

Ist $A \cap B = \varnothing$, heißen A und B **disjunkt**, z.B. Männer und Frauen, weiße und schwarze Schachbrettfelder, alle Studierenden im 1., 2., 3., … Fachsemester.

4. **Vereinigungsmenge** zweier Mengen, lies: *„vereinigt“*.

$$\boxed{A \cup B := \{\, x \mid x \in A \vee x \in B \,\}}\ .$$



Anmerkung: die Teilmenge $A \cap B \subseteq A \cup B$ zählt nicht doppelt.

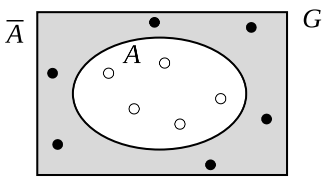
Beispiel:

$$\begin{aligned} A &:= \{\, \text{alle Beuth-Studierenden} \,\} \\ B &:= \{\, \text{alle Beuth-Beschäftigten} \,\} \\ A \cup B &= \{\, \text{alle Beuth-Angehörigen} \,\}\ . \end{aligned}$$

$\longrightarrow$ *$A \cap B = \{$ alle Beuth-Tutoren $\}$.*

5. **Komplement** einer Menge, lies: *„quer“*.
Wir brauchen die Grundmenge G hier explizit:

$$\boxed{\overline{A} := \{ x \in G \mid \neg(x \in A) \}}\ .$$

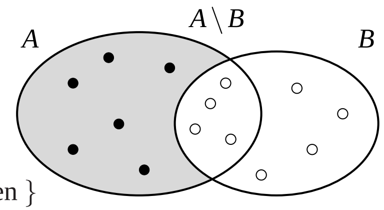


Beispiel:

$$\begin{aligned} G &:= \{\, \text{alle Kursteilnehmer} \,\} \\ A &:= \{\, \text{alle Frauen im Kurs} \,\} \ \longleftarrow \text{“im Kurs“, da } A \subseteq G \text{ sein muss} \\ \overline{A} &= \{\, \text{alle Männer im Kurs} \,\} \ \longleftarrow \text{“im Kurs“, da auch } \overline{A} \subseteq G \text{ ist.} \end{aligned}$$

6. **Differenzmenge** zweier Mengen, lies: *„ohne“*.

$$\boxed{A \setminus B := \{\, x \mid x \in A \wedge x \notin B \,\}}\ .$$



Beispiel:

$$\begin{aligned} A &:= \{\, \text{alle Informatik-Studierenden} \,\} \\ B &:= \{\, \text{alle Studierenden im 1. Semester} \,\} \\ A \setminus B &= \{\, \text{alle Informatik-Studierenden, die keine Erstsemester sind} \,\}\ . \end{aligned}$$

Mit Hilfe der Differenzmenge können wir deutlicher machen, dass die Grundmenge beim Komplement eine wichtige Rolle spielt:

$$\overline{A} = G \setminus A\ .$$

$\longrightarrow$ *Prüfen Sie die Mengengleichheit, um das zu sehen.*

Achtung: es ist ein beliebter Fehler z.B. zu schreiben:

$$A \cap B = \forall x : (x \in A \wedge x \in B)\ .$$

Dies ergibt keinen Sinn, weil das linke Objekt eine *Menge* ist und das rechte ein *logischer Ausdruck* (als Ergebnis eines Prädikats)! Achten Sie genau darauf, mit welchen Objekten sie arbeiten und unterscheiden Sie deren Typ. Nur $A \subseteq B$ und $A = B$ sind Prädikate, die anderen Verknüpfungen ergeben Mengen.

6.4 Rechenregeln für Mengen

Alle logischen Gesetze finden wir für Mengen wieder. Mengenoperationen führen sie sozusagen auf allen Elementen gleichzeitig aus.

1. **Kommutativität** des Schnitts: (Venn-Diagramm s.u.)

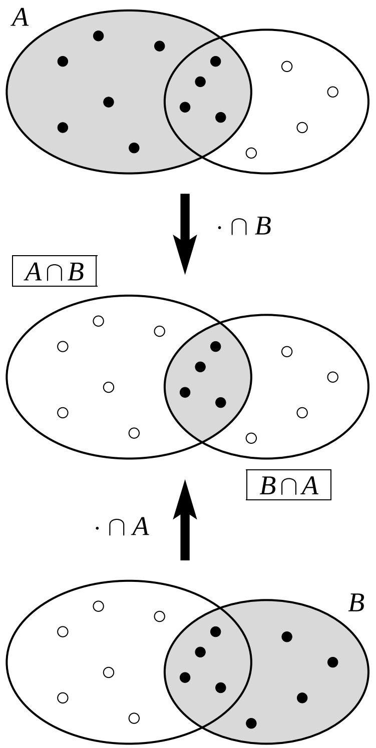
$$\begin{aligned} A \cap B &= \{x \mid x \in A \wedge x \in B\} && \text{Kommutativität von } \wedge \\ &= \{x \mid x \in B \wedge x \in A\} \\ &= B \cap A\ . \end{aligned}$$

Analog: Kommutativität der Vereinigung: $A \cup B = B \cup A$.

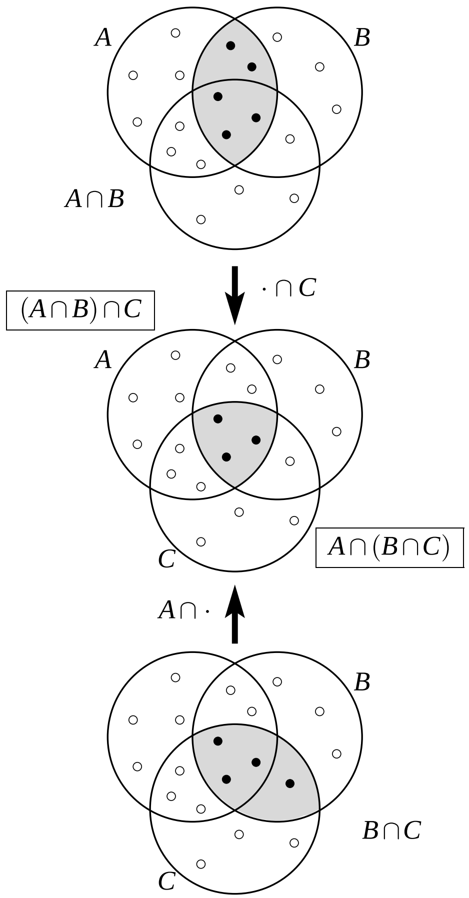
2. **Assoziativität** des Schnitts: (Venn-Diagramm s.u.)

$$\begin{aligned} (A \cap B) \cap C &= \{x \mid x \in A \cap B \wedge x \in C\} \\ &= \{x \mid (x \in A \wedge x \in B) \wedge x \in C\} && \text{Assoz. von } \wedge \\ &= \{x \mid x \in A \wedge (x \in B \wedge x \in C)\} \\ &= \{x \mid x \in A \wedge x \in B \cap C\} \\ &= A \cap (B \cap C)\ . \end{aligned}$$

Analog: Assoziativität der Vereinigung: $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$.



Kommutativität



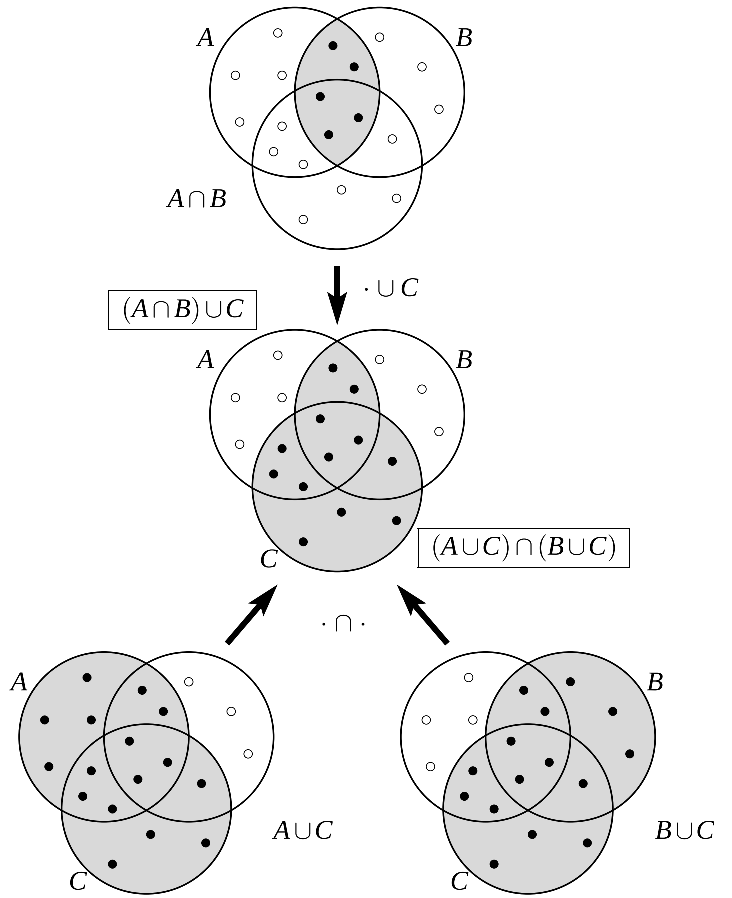
Assoziativität

3. **Distributivität** von Schnitt und Vereinigung: → *Aufgabe 6.5*

$$
\begin{aligned}
(A \cap B) \cup C &= (A \cup C) \cap (B \cup C) \\
(A \cup B) \cap C &= (A \cap C) \cup (B \cap C) \\
A \cap (B \cup C) &= (A \cap B) \cup (A \cap C) \\
A \cup (B \cap C) &= (A \cup B) \cap (A \cup C) .
\end{aligned}
$$

Hier das erste Gesetz:

$$
\begin{aligned}
(A \cap B) \cup C &= \{x \mid x \in A \cap B \vee x \in C\} \\
&= \{x \mid (x \in A \wedge x \in B) \vee x \in C\} && \text{Distrib.} \\
&= \{x \mid (x \in A \vee x \in C) \wedge (x \in B \vee x \in C)\} \\
&= \{x \mid x \in A \cup C \wedge x \in B \cup C\} \\
&= (A \cup C) \cap (B \cup C) .
\end{aligned}
$$



4. **de Morgansche Regeln** für Mengen: → *Aufgabe 6.5*

$$
\begin{aligned}
\overline{A \cap B} &= \overline{A} \cup \overline{B} \\
\overline{A \cup B} &= \overline{A} \cap \overline{B} .
\end{aligned}
$$

5. **Konsistenz** der Teilmenge:

$$A \subseteq B \;\Leftrightarrow\; A \cup B \;=\; B$$
$$A \subseteq B \;\Leftrightarrow\; A \cap B \;=\; A\,.$$

Diese Regeln verbinden Teilmengen- und Gleichheitsbeziehung zwischen Mengen. Dahinter stehen auf Prädikatenebene die Tautologien

$$a \to b \;\Leftrightarrow\; a \vee b \leftrightarrow b$$
$$a \to b \;\Leftrightarrow\; a \wedge b \leftrightarrow a\,,$$

wobei $a :\Leftrightarrow (x \in A)$ und $b :\Leftrightarrow (x \in B)$.

$\longrightarrow$ *Beweisen Sie sie durch eine Methode Ihrer Wahl!*

6. **Gleichheit** als Inklusionspaar:

$$\begin{aligned} A = B \;&\Leftrightarrow\; (x \in A \Leftrightarrow x \in B) \\ &\Leftrightarrow\; (x \in A \Rightarrow x \in B) \wedge (x \in B \Rightarrow x \in A) \\ &\Leftrightarrow\; A \subseteq B \wedge B \subseteq A\,. \end{aligned}$$

$\longrightarrow$ *Eine Gleichheit kann deshalb auch als Paar von Inklusionen in beiden Richtungen gezeigt werden.*

Beispiel: $A := \{\, n \in \mathbb{N} \mid n \text{ gerade} \,\} \;=\; \{\, n \in \mathbb{N} \mid n^2 \text{ gerade} \,\} =: B$

Beweis: z.z.: $A \subseteq B \wedge B \subseteq A$

Das bedeutet, wir müssen zeigen:

$$\begin{aligned} A \subseteq B \;&\Leftrightarrow\; (n \in A \Rightarrow n \in B) \;\Leftrightarrow\; (n \text{ gerade} \;\Rightarrow\; n^2 \text{ gerade}) \\ B \subseteq A \;&\Leftrightarrow\; (n \in B \Rightarrow n \in A) \;\Leftrightarrow\; (n^2 \text{ gerade} \;\Rightarrow\; n \text{ gerade}) \\ &\overset{\text{Kontraposition}}{\Leftrightarrow}\; (n \text{ ungerade} \;\Rightarrow\; n^2 \text{ ungerade})\,. \end{aligned}$$

Der Vorteil der Aufspaltung in zwei Schritte ist die Möglichkeit, einen davon anders zu behandeln als den anderen. Wir hatten in **??.??** genau diese beiden Implikationen gezeigt. □

6.5 Aufgabe. (Übungen zu Mengen.)

6.6 Aufbau des Zahlensystems

Wir haben gesehen, dass Mengen durch Beschreibung (6.2.3) oder Konstruktion (6.2.4) aus anderen Mengen hervorgehen können. So ist auch das Zahlensystem aufgebaut.

- $\boxed{\mathbb{N}}$ Die Menge $\mathbb{N} = \{1,2,3,\ldots\}$ wird nicht aus anderen Mengen konstruiert oder beschrieben. Sie ist eine Grundmenge, die „schon da“ ist und auf der alle anderen aufbauen. Ihre Definition ist sehr theoretisch und wir behandeln sie nicht.
- $\boxed{\mathbb{N}_0}$ Traditionell beginnen die natürlichen Zahlen mit 1. Die Menge
$$\mathbb{N}_0 \;:=\; \mathbb{N} \cup \{0\}$$
wird davon ebenso traditionell unterschieden.
- $\boxed{\mathbb{Z}}$ Die Menge $\mathbb{N}$ ist abgeschlossen unter Addition, aber nicht Subtraktion. Um auch die Umkehrung der Addition immer ausführen zu können, brauchen wir die Menge aller möglichen Ergebnisse:
$$\mathbb{Z} \;:=\; \{\, m - n \mid m, n \in \mathbb{N}_0 \,\}\,.$$
Dies ist äquivalent zu der bekannteren Definition $\longrightarrow$ *Aufgabe 6.15*
$$\mathbb{Z} \;=\; \mathbb{N}_0 \cup \{\, -n \mid n \in \mathbb{N} \,\}\,.$$
- $\boxed{\mathbb{Q}}$ Die Menge $\mathbb{Z}$ ist abgeschlossen unter Multiplikation, aber nicht Division. Um auch die Umkehrung der Multiplikation (außer Division durch 0) immer ausführen zu können, brauchen wir die Menge aller möglichen Ergebnisse:
$$\mathbb{Q} \;:=\; \{\, \tfrac{p}{q} \mid p \in \mathbb{Z},\ q \in \mathbb{N} \,\}\,.$$
Dies ist (ohne Beweis) äquivalent zu der bekannten Definition
$$\mathbb{Q} \;=\; \{\, \text{alle Dezimalzahlen mit endlicher oder periodischer Ziffernfolge} \,\}\,.$$
- $\boxed{\mathbb{R}}$ Die Menge $\mathbb{Q}$ ist abgeschlossen unter *endlichen* Operationen der vier Grundrechenarten. Wir können beliebig lange Terme formulieren, in denen rationale Zahlen mit $+ - \cdot \div$ verknüpft werden und können sicher sein, dass das Ergebnis wieder rational ist. Beispiel:
$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots + \frac{1}{2^n} \;=\; 1 - \frac{1}{2^n}\,.$$
(Beweis per Induktion!) Bei dieser Summe sieht man das an der Formel rechts auch sofort. Ebenso ist das bei dieser Summe ohne geschlossene Formel:
$$\frac{1}{1} + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \ldots + \frac{1}{n^2}\,.$$
Wenn wir die Anzahl der Summanden bis ins Unendliche erhöhen, nimmt die erste Summe den Wert $1 \in \mathbb{Q}$ an, die zweite aber $\pi^2/6 \notin \mathbb{Q}$. Also ist $\mathbb{Q}$ unter *unendlichen* Grundrechenoperationen nicht abgeschlossen.

  Wir können dieses Manko hier noch nicht präzise fassen, tun das dann später in **??.??**. Wir halten zunächst fest, dass $\mathbb{R}$ dieses Problem löst.

Erweiterte Mengen

6.7 Mengen von Mengen

1. *Streichhölzer.*
   Eine Schachtel ist eine Menge von Streichhölzern.
   Eine Packung ist eine Menge von Schachteln.
   Eine Großpackung ist eine Menge von Packungen.
   Eine Palette ist eine Menge von Großpackungen.
   Eine Tagesproduktion ist eine Menge von Paletten. (Etc.)
2. *Studierende.*
   Ein Kurs bildet eine Menge von Studierenden.
   Ein Studiengang bildet eine Menge von Kursen.
   Ein Fachbereich bildet eine Menge von Studiengängen.
   Eine Hochschule bildet eine Menge von Fachbereichen. (Etc.)
3. *Hausbewohner.*
   Eine Wohnpartei bildet eine Menge von Bewohnern.
   Ein Haus bildet eine Menge von Wohnparteien.
   Eine Straße bildet eine Menge von Häusern.
   Eine Stadt bildet eine Menge von Straßen. (Etc.)

Hier gelten folgende Regeln:

4. Die Elemente einer höheren Menge sind nicht die Einzelelemente der niederen Menge, sondern *Mengen von (niederen) Mengen!* Es bildet sich eine Hierarchie von **Mengen 1., 2., 3., . . . Stufe**.
5. Die Elemente einer höheren Menge müssen nicht gleich groß sein. Sie können beliebige Teilmengen der niederen Grundmenge sein. Sie können auch gleiche (niedere) Elemente enthalten.

Wir haben für eine Menge 1. Stufe die Existenz einer Grundmenge gefordert, die einen Kontext darstellt (und z.B. bei der Komplementbildung explizit benötigt wird). Gebraucht wird eine solche Grundmenge auch für Mengen höherer Ordnung.

$\longrightarrow$ *Diese Begrifflichkeit mathematisch zu fassen führt zu folgender allgemeiner Definition.*

6.8 Potenzmenge

Sei G eine beliebige Grundmenge. Die **Potenzmenge** von G ist die *Menge aller Teilmengen von G*:

$$\boxed{\boldsymbol{\mathcal{P}}(\mathbf{G}) := \{A \mid A \subseteq G\}}\,, \quad \text{d.h. } A \in \mathcal{P}(G) \;\Leftrightarrow\; A \subseteq G\,.$$

$\longrightarrow$ *Das definierende Prädikat von $\mathcal{P}(G)$ ist die Teilmengeneigenschaft in G.*

Beispiel: Für $G = \{a,b\}$ ist

$$\mathcal{P}(G) = \{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{a,b\}\}\,.$$

Die Potenzmenge ist die natürliche Grundmenge für die Teilmengen von G.

6.9 Eigenschaften der Potenzmenge

1. $\mathcal{P}(G)$ ist stets eine Menge um eins höherer Stufe als G selbst. Ihre Elemente sind nicht die von G, sondern Mengen davon. Sie kann *nicht* mit G interagieren, z.B. sind die Ausdrücke $G \subseteq \mathcal{P}(G)$, $\mathcal{P}(G) \cap G$ sinnlos.
2. Eine Potenzmenge ist niemals leer, denn sie enthält immer mindestens die leere Menge:
   $$\mathcal{P}(G) \supseteq \{\varnothing\}\,.$$
   $\mathcal{P}(G)$ enthält auch stets G selbst, deshalb für $G \neq \varnothing$ mindestens 2 Elemente.
3. $\mathcal{P}(G)$ ist abgeschlossen gegenüber Durchschnitt, Vereinigung und Komplement ihrer Elementmengen:
   $$A,B \in \mathcal{P}(G) \;\Rightarrow\; \begin{cases} A \cap B \in \mathcal{P}(G) \\ A \cup B \in \mathcal{P}(G) \\ \overline{A}, \overline{B} \in \mathcal{P}(G)\,. \end{cases}$$
   Damit ist $\mathcal{P}(G)$ abgeschlossen gegenüber *allen* Mengenoperationen, da diese auf $\cap\ \cup\ \bar{\cdot}$ zurückgeführt werden können (so wie alle Booleschen Funktionen auf $\wedge\ \vee\ \neg$).
4. Die Potenzmenge kann iteriert werden, um Mengen noch höherer Stufe zu erzeugen, z.B. $\mathcal{P}(\mathcal{P}(G))$. Beispiel:
   $$\mathcal{P}(\mathcal{P}(\{a\})) = \mathcal{P}(\{\varnothing, \{a\}\}) = \{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\{a\}\}, \{\varnothing, \{a\}\}\}\,.$$

6.10 Beispiel. Die Potenzmenge als Ganze wird selten benötigt. Meist spielt eine Teilmenge von ihr, eine sog. **Mengenfamilie**, die Hauptrolle in Anwendungen.

1. (Aufgabe **??**.3) Lena sagt: „Max lügt!“ — Max sagt: „ Maria lügt!“ — Maria sagt: „Lena und Max lügen!“

   Wir hatten drei Variablen die folgenden Bedeutungen zugewiesen:

   a := „Lena sagt die Wahrheit.“
   b := „Max sagt die Wahrheit.“
   c := „Maria sagt die Wahrheit.“

und die logische Bedingung

$$f(a,b,c) \;:=\; (a \oplus b) \,\wedge\, (b \oplus c) \,\wedge\, (c \oplus (a \vee b))$$

aufgestellt. Wir definieren die Grundmenge $G := \{a,b,c\}$ und ihre Potenzmenge als Mengenfamilie M_0:

$$M_0 \;:=\; \mathcal{P}(G) \;=\; \{\, \varnothing, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{b,c\}, \{a,b,c\} \,\}\,.$$

Jede Teilmenge $L \in M$ soll bedeuten, dass die darin enthaltenen Aussagen *wahr* sind und die fehlenden *falsch*. M enthält alle prinzipiellen Alternativen.

Um die zulässigen Alternativen zu finden, prüfen wir, wann sie die gegebenen Bedingungen *wahr* machen:

- $a \oplus b$: unzulässig werden $\varnothing$, $\{c\}$, $\{a,b\}$, $\{a,b,c\}$, weil entweder a,b oder keins von beiden darin enthalten ist. Es bleiben übrig:

$$M_1 \;:=\; \{\, L \in M_0 \mid (a \in L) \oplus (b \in L) \,\} \;=\; \{\, \{a\}, \{b\}, \{a,c\}, \{b,c\} \,\}\,.$$

- $b \oplus c$: unzulässig werden $\{a\}$, $\{b,c\}$, weil entweder b,c oder keins von beiden darin enthalten ist. Es bleiben übrig:

$$M_2 \;:=\; \{\, L \in M_1 \mid (b \in L) \oplus (c \in L) \,\} \;=\; \{\, \{b\}, \{a,c\} \,\}\,.$$

- $c \oplus (a \vee b)$: unzulässig wird $\{a,c\}$, es bleibt übrig:

$$M_3 \;:=\; \{\, L \in M_2 \mid (c \in L) \oplus (a \in L \vee b \in L) \,\} \;=\; \{\, \{b\} \,\}\,.$$

Die Lösung ist die einzige verbleibende Alternative $\{b\}$: Max sagt die Wahheit und die anderen beiden lügen.

$\longrightarrow$ *Dies ist eine andere Betrachtungsweise des logischen Ausschlusses: die Familie der Alternativen reduzieren.*

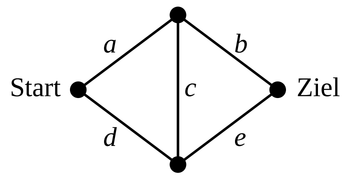
2. *Skatspiel.* Grundmenge: $G := \{\, 32 \text{ Karten} \,\}$.
   Zu Anfang bekommen zwei Spieler eine 10-elementige Teilmenge von G und einer eine 12-elementige. Im Laufe des Spiels durchlaufen die Hände immer kleinere Teilmengen.
   Familie: $\{A \in \mathcal{P}(G) \mid |A| \leq 12\,\}$.

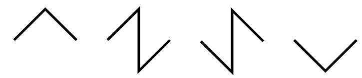
3. *Stundenplan.* Grundmenge: $G := \{\, \text{alle Kurse im Studiengang} \,\}$.
   Sie stellen jedes Semester eine Teilmenge von G zusammen, deren Elemente (Kurse) überschneidungsfrei sind und Sie zeitlich auslasten.
   Familie: kleine Teilmengen von G, ca. 3–5 Elemente.

4. *Navigationsgerät.* Grundmenge:

$$G \;:=\; \{\, \text{alle elementaren Strecken zwischen zwei Orten} \,\}\,.$$

   Gegeben: Start- und Zielort, gesucht: kürzeste Verbindung dazwischen über eine Folge von elementaren Strecken. (Hier spielen zusätzliche Längendaten eine Rolle.)
   Familie: alle Teilmengen von $\mathcal{P}(G)$, die Strecken ohne Kreise zwischen Start- und Zielort bilden.





Familie: $\{\, \{a,b\}, \{a,c,e\}, \{b,c,d\}, \{d,e\} \,\}$

   Das Navi sucht aus der Familie ein Element mit der kleinsten Bewertung heraus (Länge, Dauer, Kosten, etc.)

$\longrightarrow$ *Wir betrachten die Potenzmenge wieder in Abschnitten* **??** *und* **??**.

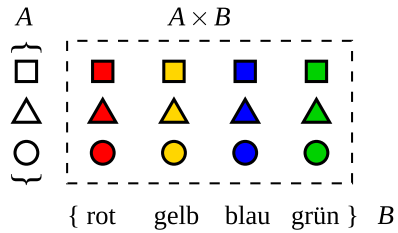
6.11 Hierarchie der Mengen

TODO!!

6.12 Kartesisches Produkt

1. Das **kartesische Produkt**[17] zweier Mengen A, B (lies: „A kreuz B.“) ist definiert als

$$\boxed{A \times B \;:=\; \{\, (a,b) \mid a \in A \,\wedge\, b \in B \,\}}\;.$$



2. Die Elemente von $A \times B$ sind **geordnete Paare** von Elementen von A und B. Das bedeutet:

$$(a,b) = (c,d) \;\;\Leftrightarrow\;\; a = c \,\wedge\, b = d\,.$$

[17] René Descartes, 1596–1650, französischer Mathematiker

3. Ist $A = B$, schreiben wir auch $A \times A =: A^2$, lies: „A zwei."
4. Analoges gilt für mehr als zwei Mengen, z.B.

$$A \times B \times C \;=\; \{\,(a,b,c) \mid a \in A \,\wedge\, b \in B \,\wedge\, c \in C\,\}\,,$$
$$A \times A \times A \;=:\; A^3 \qquad \text{„}A\text{ drei" .}$$

6.13 Beispiel. 1. *Spielkarten:*

$$\begin{aligned} F &= \{\text{Kreuz, Pik, Herz, Karo}\} && \leftarrow \text{Farben} \\ W &= \{\text{A, K, D, B, 10, 9, 8, 7}\} && \leftarrow \text{Wertigkeiten} \\ F \times W &= \{\,(f,w) \mid f \in F,\ w \in W\,\} && \leftarrow \textit{Skatblatt.} \end{aligned}$$

2. *Kartesisches Koordinatensystem.* Alle Punkte der Ebene können bekanntlich durch 2 Zahlen eindeutig beschrieben werden:

$$\mathbb{R}^2 \;:=\; \{\,(x,y) \mid x,y \in \mathbb{R}\,\} \;=\; \mathbb{R} \times \mathbb{R}\,.$$

Diese Definition entspricht also genau dem kartesischen Produkt. Analog $\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^n$ etc.

3. *Modulorechnung.* Bei ganzzahliger Division zweier Zahlen fallen zwei Werte an, Quotient und Rest. Mathematisch kann diese Operation so geschrieben werden:

$$div\,:\ \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0\,, \quad div(m,n) \;:=\; (\,\lfloor \tfrac{m}{n} \rfloor, m \bmod n\,)\,.$$

→ Die obere Notation beschreibt die „Schnittstelle" der Funktion Funktion div: nur die Typen der Parameter und der Rückwerte.

6.14 Eigenschaften des kartesischen Produkts

1. Die Produktmenge $A \times B$ kann *nicht* mit A, B interagieren, z.B. sind die Ausdrücke $A \subseteq A \times B,\ (A \times B) \cap B$ sinnlos.
2. Die Komponenten der Paare sind nicht vertauschbar. Für $A \neq B$ ist das offensichtlich, da ihre Elemente verschieden sind. Auch für $A = B$ gilt nach 6.12.2:

$$a \neq b \;\Leftrightarrow\; (a,b) \neq (b,a)\,.$$

Die beiden Paare rechts zählen als verschiedene Elemente von A^2.

3. Daraus folgt sofort: das kart. Produkt ist nicht kommutativ: $A \times B \neq B \times A$. Es ist auch nicht assoziativ: $(A \times B) \times C \neq A \times (B \times C)$ → *Aufgabe 6.15* .
4. Das kartesische Produkt ist die natürliche Grundmenge für *Relationen*, siehe 7.1.

6.15 Aufgabe. (Übungen zu erweiterten Mengen.)

7 Relationen

→ Hier kommt eine wichtige Anwendung von Mengen.

7.1 Begriff der Relation

1. Eine **binäre Relation** R zwischen zwei Mengen A, B ist eine (beliebige) Teilmenge ihres kartesischen Produkts:

$$\boxed{R \subseteq A \times B}\,, \ \text{d.h.} \quad R \;=\; \{\,(a,b) \in A \times B \mid r(a,b)\,\}$$

mit $r : A \times B \to \{0,1\}$ als definierendem Prädikat.

2. Für „$(x,y) \in R$" schreiben wir auch „xRy", lies: „*x steht in Relation R zu y*". Spezielle Relationen haben eigene Zeichen, z.B.

NAME	Zeichen	Bedeutung	Objekte $\in A, B$
LTH	$<$	kleiner als	Zahlen, Strings
LEQ	$\leq$	kleiner oder gleich	Zahlen, Strings
EQ	$=$	gleich	bel. für $A, B \subseteq G$ dieselbe Grundmenge
BOOL	$\subseteq$	Teilmenge	Mengen
PAR	$\parallel$	parallel zu	Geraden, Vektoren
REC	$\perp$	senkrecht zu	Geraden, Vektoren
CONG	$\cong$	kongruent zu	geometrische Formen

7.2 Beispiel. Relationen sind überall dort nützlich, wo Elemente zweier Mengen nur eingeschränkt kombiniert werden können:

1. $\{\,(s,m) \in \{\text{Studierende}\} \times \{\text{Module}\} \mid s \text{ belegt } m\,\}$
2. $\{\,(s,L) \in \{\text{Städte}\} \times \{\text{Länder}\} \mid s \text{ liegt in } L\,\}$,
also in einem geometrischen Sinne: $(s,L) \in R \;\Leftrightarrow\; s \in L$.
3. **Teilerrelation**: $DIV := \{\,(k,n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid k|n\,\}$,
z.B. $(1,n) \in DIV$ für alle $n \in \mathbb{N}$, $(3,9) \in DIV,\ (4,9) \notin DIV$
4. Relationen können auch unendlich „dicht" sein: $\{\,(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\,\}$, $\{\,(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = x^2\,\}$

7.3 Darstellungen binärer Relationen

1. *(Aufgabe* **??***.2)*

$$\begin{aligned} L &:= \{\,\text{rot, gelb, grün}\,\} && \leftarrow \text{Ampellichter,}\\ P &:= \{\,\text{I, II, III, IV}\,\} && \leftarrow \text{Ampelphasen,}\\ R &:= \{\,(\ell,p) \in L \times P \mid \ell \text{ leuchtet in } p\,\}\,. \end{aligned}$$

Es gibt drei Darstellungen für *endliche* Grundmengen, die jeweils verschiedene Aspekte von Relationen betonen:

a) **Menge:** entspricht der Definition. Als Aufzählung der Elemente zeigt sie die *Größe* (Anzahl Paare), als Beschreibung das *definierende Prädikat*.

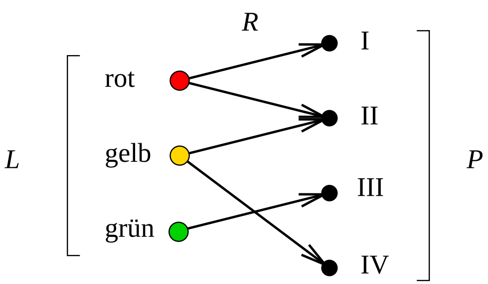
$$\begin{aligned} R &= \{\,(\text{rot,I}), (\text{rot,II}), (\text{gelb,II}), (\text{gelb,IV}), (\text{grün,III})\,\}\\ &= \{\,(\ell,p) \in L \times P \mid \\ &\qquad (\ell = \text{rot} \wedge p \le \text{II}) \vee (\ell = \text{gelb} \wedge p \text{ ist gerade}) \vee (\ell = \text{grün} \wedge p = \text{III})\,\}\,. \end{aligned}$$

b) **Matrix Mat(R)**: die Elemente von L,P werden als Zeilen bzw. Spalten aufgezählt und die Werte des Prädikats in die Tabelle geschrieben:

	$\in R$	I	II	III	IV
		p			
	rot	1	1	0	0
ℓ	gelb	0	1	0	1
	grün	0	0	1	0

Hier können wir Werte schnell ablesen und ggf. bestimmte Muster erkennen (siehe 7.9). Matrizen werden bei „großen“ Relationen schnell unübersichtlich, sie sind aber gut geeignet als Datenstruktur im Computer.

c) **Graph**: die Elemente von L werden als übereinander angeordnete **Knoten** (Punkte) gezeichnet, ebenso die Elemente von P rechts daneben. Ist $(\ell,p) \in R$, wird eine **gerichtete Kante** (Pfeil) vom jeweiligen L-Knoten zum entsprechenden P-Knoten gezeichnet (links nach rechts):



Die optische Gestaltung der Mengen L,P ist frei, solange die Kanten stimmen. Sie dürfen auch kurvig sein. Ermöglicht optische Erfassung bestimmter Eigenschaften, ist daher gut geeignet für Menschen.

2. $G := \{\,1,2,3,4,6,8\,\}$, $R := \{\,(k,n) \in G^2 \mid k$ ist echter Teiler von $n\,\}$.

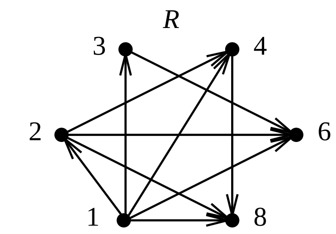
a) *Menge:*

$$\begin{aligned} R &= \{\,(k,n) \in G^2 \mid k|n \wedge k \neq n\,\}\\ &= \{\,(1,2),\ (1,3),\ (1,4),\ (1,6),\ (1,8),\ (2,4),\ (2,6),\ (2,8),\ (3,6),\ (4,8)\,\}\,. \end{aligned}$$

b) *Matrix* Mat(R):

	$\in R$	1	2	3	4	6	8
				n			
	1	0	1	1	1	1	1
	2	0	0	0	1	1	1
k	3	0	0	0	0	1	0
	4	0	0	0	0	0	1
	6	0	0	0	0	0	0
	8	0	0	0	0	0	0

c) *Graph:* wenn $R \subseteq G^2$, werden die Elemente von G nur *einmal* als Knoten gezeichnet, die Kanten wie oben:



3. G wie in Beispiel 2, $DIV = \{\,(k,n) \in G^2 \mid k|n\,\}$.

a) *Menge:* es kommen zu R wie in Beispiel 2 hinzu:

$$I_G = \{\,(1,1),\ (2,2),\ (3,3),\ (4,4),\ (6,6),\ (8,8)\,\}\,.$$

Die spezielle Relation

$$\mathbf{I_G} := \{\,(x,y) \in G^2 \mid x = y\,\}$$

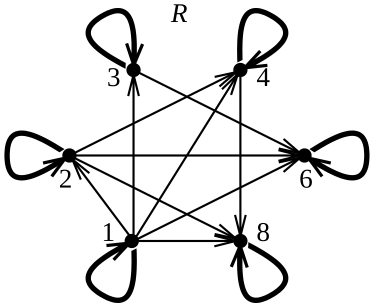
heißt die **Identität**.

b) *Matrix* $\mathrm{Mat}(R)$: hier wird zusätzlich die **Hauptdiagonale** auf 1 gesetzt. Diese Diagonale ist die *Matrix* $\mathrm{Mat}(I_G)$ *der Identität*.

$\in R$ (k \ n)	1	2	3	4	6	8
1	**1**	1	1	1	1	1
2	0	**1**	0	1	1	1
3	0	0	**1**	0	1	0
4	0	0	0	**1**	0	1
6	0	0	0	0	**1**	0
8	0	0	0	0	0	**1**

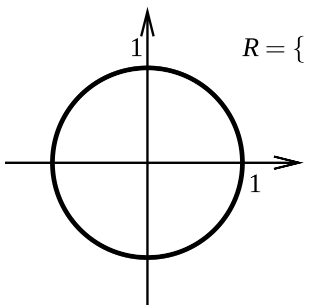
$$\mathrm{Mat}(I_G) = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix}$$

c) *Graph:* es kommt um jeden Knoten eine **Schlinge** hinzu. Diese Schlingen sind der *Graph der Identität*.



4. $R = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1 \}$.

Da R unendlich groß ist, kommt kein Graph in Frage. In einer Matrix können die Elemente nicht aufgezählt werden, aber in beiden Richtungen als Koordinatenachsen eingetragen. Statt 0/1-Einträgen werden die Punkte gefärbt.



$R = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1 \}$

Wir erhalten eine Punktmenge (oben fett schwarz) in einem *kartesischen Koordinatensystem*.

$\longrightarrow$ Aus historischen Gründen erfolgt die Aufzählung der Werte in einem Koordinatensystem gegenüber der Aufzählung in einer Matrix um 90° gegen der Uhrzeiger gedreht. Im Prinzip ist beides dieselbe Idee.

7.4 Aufgabe. (Übungen zur Darstellung von Relationen.)

7.5 Inversion binärer Relationen

Für eine Relation $R \subseteq A \times B$ ist die **inverse Relation** definiert als

$$\boxed{R^{-1} := \{ (b,a) \in B \times A \mid (a,b) \in R \}}\,.$$

R und R^{-1} haben immer dasselbe Prädikat, nur die Komponenten sind vertauscht:

$$(b,a) \in R^{-1} \iff (a,b) \in R\,.$$

Beispiel 1: (sprachliche Umkehrung)

$$\begin{aligned} DIV &= \{ (a,b) \in \mathbb{Z}^2 \mid a|b \} \quad a \text{ teilt } b \\ DIV^{-1} &= \{ (b,a) \in \mathbb{Z}^2 \mid a|b \} \quad b \text{ ist Vielfaches von } a. \end{aligned}$$

Beispiel 2: (Ampel, siehe 7.3.1)

$$R^{-1} = \{ \text{(I,rot), (II,rot), (II,gelb), (III,grün), (IV,gelb)} \}\,.$$

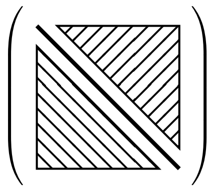
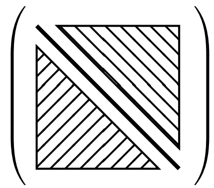
Die Matrix ist **transponiert** (an der Hauptdiagonalen gespiegelt):

$\mathrm{Mat}(R)$ (ℓ \ p)	I	II	III	IV
rot	**1**	1	0	0
gelb	0	**1**	0	1
grün	0	0	**1**	0

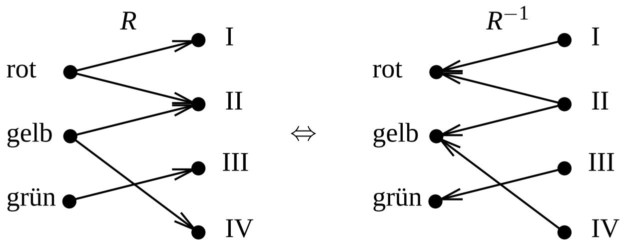
$\iff$

$\mathrm{Mat}(R^{-1})$ (p \ ℓ)	rot	gelb	grün
I	**1**	0	0
II	1	**1**	0
III	0	0	**1**
IV	0	1	0

Im allgemeinen: $\mathrm{Mat}(R^{-1}) = \mathrm{Mat}(R)^{\mathrm{T}}$

$\mathrm{Mat}(R) =$  $\iff \mathrm{Mat}(R^{-1}) =$ 

Im Graphen werden die Kantenrichtungen umgekehrt:



7.6 Verkettung binärer Relationen

Seien $R \subseteq A \times B$ und $S \subseteq B \times C$ Relationen, dann ist ihre **Verkettung** $S \circ R \subseteq A \times C$ (lies: „S nach R“) definiert als

$$\boxed{S \circ R := \{ (a,c) \in A \times C \mid \exists b \in B : (a,b) \in R \wedge (b,c) \in S \}}\,.$$

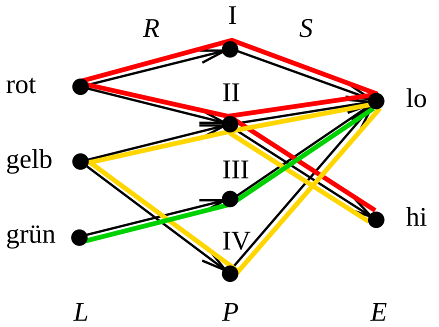
Beispiel 1: Ampel.
Wir führen die neue Menge $E := \{\text{lo, hi}\}$ ein, deren Elemente den Status des Energieverbrauchs angeben („niedrig“ oder „hoch“). Dazu wird jede Ampelphase in Relation $S \subseteq P \times E$ zu ihrem Energieverbrauch gesetzt:

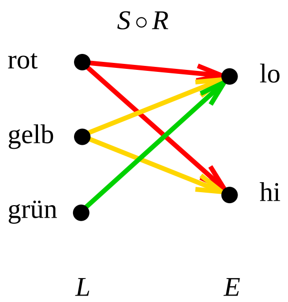
$$S := \{ (\text{I,lo}), (\text{II,lo}), (\text{II,hi}), (\text{III,lo}), (\text{IV,lo}) \}\,.$$

Alle Phasen stehen in Relation zu „lo“, weil in ihnen mindestens ein Licht brennt. Nur Phase II hat „hi“, weil in ihr zwei Lichter brennen. (Das Paar (II,lo) ist vorgesehen für den Fall, dass eins der beiden ausfällt.)
Gemäß der obigen Definition erhalten wir für die Ampel die direkte Relation von Lichtern L mit Energieverbräuchen E als Verkettung:

$$S \circ R = \{ (\text{rot,lo}), (\text{rot,hi}), (\text{gelb,lo}), (\text{gelb,hi}), (\text{grün,lo}) \}\,.$$

Tatsächlich leuchten rot und gelb sowohl in einer niedrigen wie einer hohen Verbrauchsphase, nur grün allein in einer niedrigen.
Diese formale Definition ist anschaulich schneller zu erkennen im Graphen:





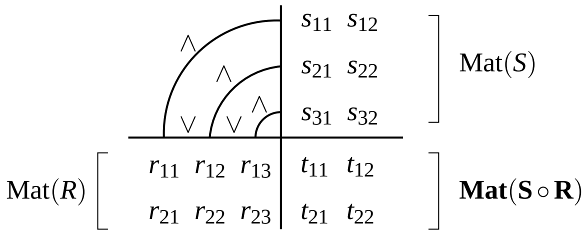
Im Graphen von $S \circ R$ erscheinen alle gerichteten Wege von L über P nach E verkürzt auf eine Kante. Doppelungen fallen weg, d.h. die beiden roten Wege bewirken zusammen nur eine neue Kante, ebenso die beiden gelben.

$\longrightarrow$ *Der Graph einer Relation drückt die Verkettung für Menschen intuitiv aus. Computer können aber nur mit der Matrix arbeiten, d.h. mit den Relationsprädikaten.*

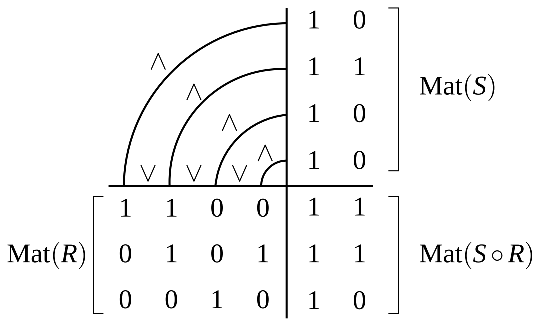
Für die Matrizen der Relationen gilt:

$$\boxed{\text{Mat}(S \circ R) = \text{Mat}(R) \cdot \text{Mat}(S)}\,,$$

wobei diese Multiplikation nach dem Falk-Schema erklärt wird:



Am Beispiel der beiden Ampelrelationen:



Jede Spalte von $\text{Mat}(S)$ wird mit jeder Zeile von $\text{Mat}(R)$ verknüpft, indem die Einträge entlang der Bögen sozusagen aufeinander gedreht werden. Dann werden die jeweiligen Einträge mit $\wedge$ verknüpft und die Ergebnisse dieser Konjunktionen in einer großen Disjunktion zusammengefasst. Der Ergebniswert wird jeweils dort in die entstehende Matrix unten rechts eingetragen, wo die beteiligte Zeile und Spalte einander kreuzen.
Das ist dasselbe Schema, mit dem wir Matrizen in der linearen Algebra multiplizieren, siehe **??.??**. Es sind lediglich die Operationen $\cdot$ und $+$ (die für Zahlen gelten) ersetzt durch $\wedge$ bzw. $\vee$ (da wir es mit logischen Wahrheitswerten zu tun haben).

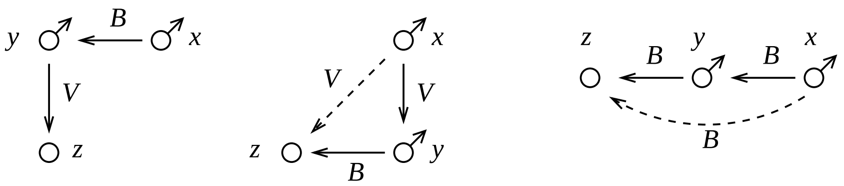
Beispiel 2: Familie. Sei $M := \{\text{alle Menschen}\}$ und

$$B := \{(x,y) \in M^2 \mid x \text{ ist Vollbruder}^{18} \text{von } y\}$$
$$V := \{(x,y) \in M^2 \mid x \text{ ist Vater von } y\}\ .$$

Dann bedeuten die folgenden Verkettungen:

$$\begin{aligned}
(x,z) \in V \circ B &\Leftrightarrow \exists y \in M : ((x,y) \in B \wedge (y,z) \in V) \\
&\Leftrightarrow x \text{ ist Bruder des Vaters } (y) \text{ von } z \\
&\Leftrightarrow x \text{ ist Onkel väterlicherseits von } z\ , \\
(x,z) \in B \circ V &\Leftrightarrow x \text{ ist Vater eines Bruders } (y) \text{ von } z \\
&\Leftrightarrow x \text{ ist Vater von } z \text{ und hat noch einen weiteren Sohn}\ , \\
(x,z) \in B \circ B &\Leftrightarrow x \text{ ist Bruder eines Bruders } (y) \text{ von } z \\
&\Leftrightarrow (x = z) \vee (x \text{ ist Bruder von } z \text{ und beide haben} \\
&\qquad \text{einen weiteren Bruder}\ .
\end{aligned}$$

In den folgenden Diagrammen ist jeweils dieselbe Generation nebeneinander dargestellt, verschiedene Generationen untereinander:



hier: $B \circ V = V$ hier: $B \circ B \supseteq B$

Anmerkung: über das Geschlecht von z erfahren wir nichts.

$\longrightarrow$ *Es ist gut zu erkennen, dass B und V in der Verkettung nicht vertauschbar sind. Die Identitäten $B \circ V = V$ und $B \circ B \supseteq B$ ($B \circ B$ ist reflexiv, siehe 7.9.1, B nicht!) hängen von den konkreten Definitionen von B,V ab und sind nicht verallgemeinerbar.*

7.7 Regeln der Verkettung

Für die Verkettung gelten die folgenden wichtigsten Regeln:

(1)	$R \circ S \neq S \circ R$	*Nicht*kommutativität
(2)	$(R \circ S) \circ T = R \circ (S \circ T)$	Assoziativität
(3)	$R \circ (S \cup T) = (R \circ S) \cup (R \circ T)$	Distributivität
	$R \circ (S \cap T) \subseteq (R \circ S) \cap (R \circ T)$	
(4)	$(R \circ S)^{-1} = S^{-1} \circ R^{-1}$	Inversion.

[18] also nicht Halbbruder

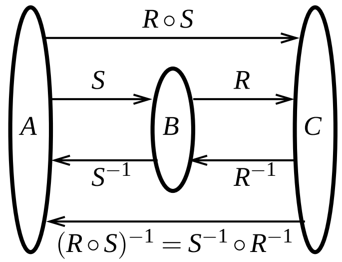
Beweis (2): Wir verwenden die Kurzschreibweise $(a,b) \in R \Leftrightarrow aRb$, vgl. 7.1.
z.z.: Elementprädikate sind äquivalent: $w((R \circ S) \circ T)z \Leftrightarrow w(R \circ (S \circ T))z$.

$$\begin{aligned}
& w((R \circ S) \circ T)z && \text{Def. von } \circ \\
\Leftrightarrow\ & \exists x : [wTx \wedge x(R \circ S)z] && \text{Def. von } \circ \\
\Leftrightarrow\ & \exists x : [wTx \wedge \exists y : (xSy \wedge yRz)] && \text{Regel } \textbf{??.??}\ (6) \\
\Leftrightarrow\ & \exists x : \exists y : [wTx \wedge (xSy \wedge yRz)] && \text{Regel } \textbf{??.??}\ (18), \text{Assoz. von } \wedge \\
\Leftrightarrow\ & \exists y : \exists x : [(wTx \wedge xSy) \wedge yRz] && \text{Regel } \textbf{??.??}\ (6) \\
\Leftrightarrow\ & \exists y : [\exists x : (wTx \wedge xSy) \wedge yRz] && \text{Def. von } \circ \\
\Leftrightarrow\ & \exists y : [w(S \circ T)y \wedge yRz] && \text{Def. von } \circ \\
\Leftrightarrow\ & w(R \circ (S \circ T))z\ .
\end{aligned}$$

Beweis (4):

$$\begin{aligned}
& x((R \circ S)^{-1})z && \text{Def. von }^{-1} \\
\Leftrightarrow\ & z(R \circ S)x && \text{Def. von } \circ \\
\Leftrightarrow\ & \exists y : (zSy \wedge yRx) && \text{Def. von }^{-1} \\
\Leftrightarrow\ & \exists y : (yS^{-1}z \wedge xR^{-1}y) && \text{Kommutativität von } \wedge \\
\Leftrightarrow\ & \exists y : (xR^{-1}y \wedge yS^{-1}z) && \text{Def. von } \circ \\
\Leftrightarrow\ & x(S^{-1} \circ R^{-1})z\ .
\end{aligned}$$

Im Diagramm rechts ist die Umkehrung der Reihenfolge graphisch dargstellt. Die Pfeile symbolisieren jeweils die Relationsrichtung. Verkettung ist gleichbedeutend mit Hintereinanderausführung, Inversion mit Umkehrung.



7.8 Aufgabe. (Übungen zu Operationen auf Relationen.)

7.9 Struktureigenschaften binärer Relationen

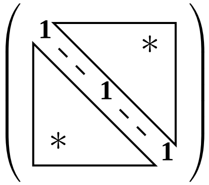
Im Folgenden betrachten wir Relationen der Form $R \subseteq G^2$, die auf nur einer Grundmenge G definiert sind.

1. **Reflexivität**. Eine Relation R heißt *reflexiv*, wenn *jedes* Element von G mit sich selbst in Relation steht:

$$\boxed{(x,x) \in R \Leftrightarrow 1} \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{I_G \subseteq R}\ .$$

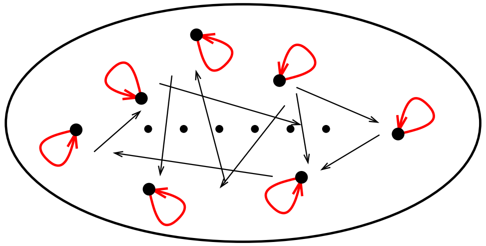
Die zweite Bedingung drückt das Kriterium durch R als Menge aus. (I_G ist die Identitätsrelation, siehe 7.3.3a).

reflexiv:



Im Graphen einer reflexiven Relation gibt es an *allen* Knoten eine Schlinge (siehe 7.3.3c):

reflexiv:



Beispiele:

a) Die Relation $LEQ = \{\, (m,n) \in \mathbb{Z}^2 \mid m \le n \,\}$ ist reflexiv:

$$(m,m) \in LEQ \;\Leftrightarrow\; m \le m \;\Leftrightarrow\; 1\,.$$

b) Die Relation $LTH = \{\, (m,n) \in \mathbb{Z}^2 \mid m < n \,\}$ ist nicht reflexiv:

$$(m,m) \in LTH \;\Leftrightarrow\; m < m \;\Leftrightarrow\; 0\,.$$

c) Die Relation $Mod3 := \{\, (m,n) \in \mathbb{Z}^2 \mid 3|(m-n) \,\}$ ist reflexiv:

$$(m,m) \in Mod3 \;\Leftrightarrow\; 3|(m-m) \;\Leftrightarrow\; 3|0 \;\Leftrightarrow\; 1\,.$$

2. **Symmetrie**. Eine Relation R heißt *symmetrisch*, wenn mit jedem Paar (x,y) auch das inverse Paar (y,x) vorkommt:

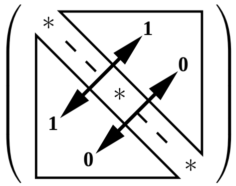
$$\boxed{(x,y) \in R \;\Leftrightarrow\; (y,x) \in R} \;\Leftrightarrow\; \boxed{R \;=\; R^{-1}}\,.$$

Sie heißt *antisymmetrisch*, wenn außer evtl. identischen Paaren keine inversen Paare vorkommen:

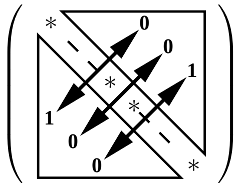
$$\boxed{(x,y) \in R \wedge (y,x) \in R \;\Rightarrow\; x = y} \;\Leftrightarrow\; \boxed{R \cap R^{-1} \subseteq I_G}\,.$$

Die Matrix einer symmetrischen Relation ist spiegelbildlich zur Hauptdiagonalen: $\mathrm{Mat}(R) = \mathrm{Mat}(R^{-1}) = \mathrm{Mat}(R)^{\mathrm{T}}$ (siehe 7.5). Bei einer antisymmetrischen Relation stehen an zueinander spiegelbildlichen Einträgen außerhalb der Hauptdiagonale nie gleichzeitig 1-Werte.

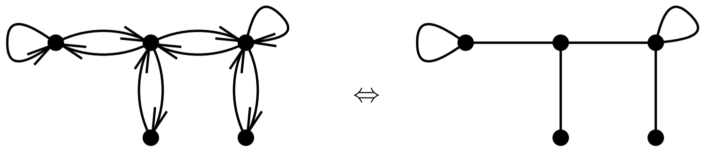
symm.:



antisymm.:



Im Graphen einer symmetrischen Relation gibt es zu jeder Kante (nicht Schlinge) auch die entgegengesetzt gerichtete Kante. Deshalb vereinfachen wir diese beiden jeweils zu einer einzigen **ungerichteten Kante**:



Analog gibt es im Graphen einer antisymmetrischen Relation höchstens eine Kante zwischen jedem Paar verschiedener Knoten. Deshalb sind die Kantenrichtungen hier wichtig. Über Schlingen ist nichts gesagt.

Beispiele:

a) Die Relation $R := \{\, (m,n) \in \mathbb{Z}^2 \mid 2|mn \,\}$ ist symmetrisch:

$$(m,n) \in R \;\Leftrightarrow\; 2|mn \;\Leftrightarrow\; 2|nm \;\Leftrightarrow\; (n,m) \in R\,.$$

Hier liefert das Kommutativgesetz der Multiplikation die entscheidende Äquivalenz in der Mitte.

b) Die Relation *LEQ* ist antisymmetrisch:

$$(m,n) \in LEQ \wedge (n,m) \in LEQ \;\Leftrightarrow\; m \le n \wedge n \le m \;\Rightarrow\; m = n\,.$$

Anmerkung: Im letzten Schritt gilt für $m,n \in \mathbb{Z}$ auch die Rückrichtung, sie wird aber nicht benötigt.

c) Die Relation *Mod3* ist symmetrisch:

$$\begin{aligned} & (m,n) \in Mod3 \\ \Leftrightarrow\; & 3|(m-n) \\ \Leftrightarrow\; & \exists k \in \mathbb{Z} : m-n \;=\; 3k \\ \Leftrightarrow\; & \exists k \in \mathbb{Z} : n-m \;=\; 3(-k) \\ \Leftrightarrow\; & 3|(n-m) \\ \Leftrightarrow\; & (n,m) \in Mod3\,. \end{aligned}$$

Z.B. ist für $(m,n) = (17,2):\; 17-2 = 15 = 3\cdot 5 \;\Rightarrow\; 2-17 = -15 = 3\cdot(-5)$.

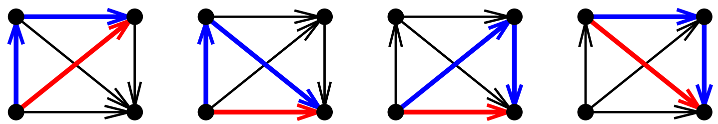
3. **Transitivität**. Eine Relation R heißt *transitiv*, wenn gilt:

$$\boxed{(x,y) \in R \wedge (y,z) \in R \;\Rightarrow\; (x,z) \in R} \;\Leftrightarrow\; \boxed{R \circ R \subseteq R}\,.$$

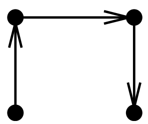
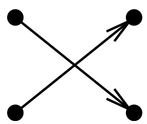
Intuitiv: R wird durch Verkettung mit sich selbst nicht verlassen.

Transitivität ist in der Mengenschreibweise oder Matrix nicht direkt zu sehen. Sie ist eine nichttriviale Eigenschaft, die am besten durch Prädikatenlogik zu untersuchen ist.

Im Graphen einer transitiven Relation gibt es zu je zwei aufeinander folgenden Kanten (blau, auch Schlingen) die entsprechende „Abkürzung" (rot):



Daraus folgt: alle Wege beliebiger Länge haben „Abkürzungen" durch direkte Kanten. $R \circ R$ ist im allgemeinen weder Teilmenge noch Obermenge von R, wie in diesem Beispiel:

R  $R \circ R$ 

Ebenso ist daran zu erkennen, dass im allgemeinen $R \cup R \circ R$ auch nicht transitiv ist (es fehlt die Kante zwischen den unteren beiden Knoten).

Ein Computer kann diese Eigenschaft feststellen, indem er die Matrix $\mathrm{Mat}(R)$ prüft. Nach Definition muss *komponentenweise* gelten:

$$R \circ R \subseteq R \;\Leftrightarrow\; (\mathrm{Mat}(R) \cdot \mathrm{Mat}(R) \;\Rightarrow\; \mathrm{Mat}(R))\,.$$

d.h. es entstehen bei der Multiplikation *keine neuen 1-Werte*.

Beispiele:

a) Die Relation LEQ ist transitiv:

$$\begin{array}{lll}
 & (m,n) \in LEQ \wedge (n,k) \in LEQ & \\
\Leftrightarrow & m \leq n \wedge n \leq k & \\
\Leftrightarrow & 0 \leq n-m \wedge 0 \leq k-n & \text{Ungleichungen addieren} \\
\Rightarrow & 0 \leq (n-m)+(k-n) \;=\; k-m & \\
\Leftrightarrow & m \leq k & \\
\Leftrightarrow & (m,k) \in LEQ. &
\end{array}$$

b) Die Relation $FRAC := \{ (\frac{a}{b},\frac{c}{d}) \in \mathbb{Q}^2 \mid ad = bc \}$ ist transitiv:

$$\begin{array}{ll}
 & (\frac{a}{b},\frac{c}{d}) \in FRAC \wedge (\frac{c}{d},\frac{e}{f}) \in FRAC \\
\Leftrightarrow & ad = bc \wedge cf = de \\
\Leftrightarrow & \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \wedge \frac{c}{d} = \frac{e}{f} \\
\Rightarrow & \frac{a}{b} = \frac{e}{f} \\
\Leftrightarrow & af = be \\
\Leftrightarrow & (\frac{a}{b},\frac{e}{f}) \in FRAC.
\end{array}$$

Im zweiten Schritt wurde $b,d,f \neq 0$ (Nenner der Brüche) ausgenutzt.

c) Die Relation $Mod3$ ist transitiv, da

$$\begin{array}{ll}
 & (k,m) \in Mod3 \wedge (m,n) \in Mod3 \\
\Leftrightarrow & 3|(k-m) \wedge 3|(m-n) \\
\Leftrightarrow & \exists p \in \mathbb{Z}: k-m = 3p \wedge \exists q \in \mathbb{Z}: m-n = 3q \\
\Rightarrow & \exists p,q \in \mathbb{Z}: [k-n \;=\; (k-m)+(m-n) \;=\; 3(p+q)] \\
\Leftrightarrow & 3|(k-n) \\
\Leftrightarrow & (k,n) \in Mod3\,.
\end{array}$$

Z.B. ist für $(k,m) = (17,2)$, $(m,n) = (2,11)$: $k-n = 11-17 = -6 = (-2)\cdot 3$.

7.10 Äquivalenzrelationen

Eine *reflexive, symmetrische und transitive* Relation $R \subseteq G^2$ heißt eine **Äquivalenzrelation (ÄR)**. Sie hat zwei besondere Eigenschaften:

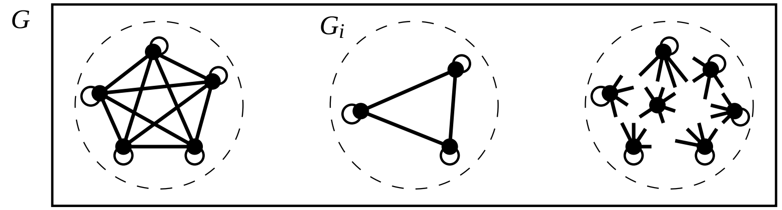
- sie teilt die Grundmenge G in *disjunkte Teilmengen* G_i auf, d.h.

$$G = G_1 \cup \ldots \cup G_n \quad \text{mit}$$
$$G_i \cap G_j = \varnothing \quad \text{für alle } i \neq j\,,$$

- alle Elemente einer G_i stehen *paarweise miteinander* in Relation und mit *keinen Elementen außerhalb* G_i:

$$G_i \times G_i \;\subseteq\; R \quad \text{für alle } i$$
$$R \cap (G_i \times G_j) \;=\; \varnothing \quad \text{für alle } i \neq j\,.$$

Die G_i heißen **Äquivalenzklassen** von G unter R. Im Graphen der Äquivalenzrelation zeigen sich diese Klassen als separate *Komponenten*, innerhalb derer *alle* der möglichen Kanten und Schlingen vorkommen:



Anmerkung: diese „Inseln“ können auch klein sein, im Extremfall nur 1 Knoten.
Die Matrix einer Äquivalenzrelation *kann* in die Gestalt *voller 1-Blöcke* gebracht werden, die jeweils genau einem G_i entsprechen:

$$\mathrm{Mat}(\ddot{A}R) \; = \; \begin{pmatrix} \boxed{1} & & 0 \\ & \boxed{1} & \\ 0 & & \boxed{1} \end{pmatrix}$$

Beispiele:

1. $G = \{\,\text{Schüler einer Schule}\,\}$ und

   $$R \; := \; \{\,(x,y) \in G^2 \mid x \text{ hat Unterricht zusammen mit } y\,\}\;.$$

   R ist eine ÄR (warum?) und teilt die Schüler auf in disjunkte *Schulklassen*.

2. *FRAC* ist eine ÄR (reflexiv? symmetrisch?) und teilt $\mathbb{Q}$ auf in unendlich viele Klassen verschiedener *Bruchwerte* (ausgekürzte Brüche).

3. *Mod3* ist auch eine ÄR, wir haben alle drei Eigenschaften gezeigt. Wie sehen die Klassen aus? Wir können sie finden, indem wir sukzessive Elemente aus $\mathbb{Z}$ hernehmen, die in keiner bekannten Klasse liegen, und ihre Klasse bestimmen. Zu Anfang ist keine Klasse bekannt, wir haben freie Auswahl und nehmen etwa $0 \in \mathbb{Z}$. Zu 0 stehen alle Zahlen in Relation, die durch 3 teilbar sind:

   $$\begin{aligned} K_0 \; &:= \; \{\,k \in \mathbb{Z} \mid (k,0) \in \mathit{Mod3}\,\} \\ &= \; \{\,k \in \mathbb{Z} \mid 3|(k-0)\,\} \\ &= \; \{\,k \in \mathbb{Z} \mid k \bmod 3 = 0\,\}\;. \end{aligned}$$

   Als nächstes nehmen wir eine Zahl in $\mathbb{Z} \setminus K_0$, z.B. 1. Ihre Klasse ist

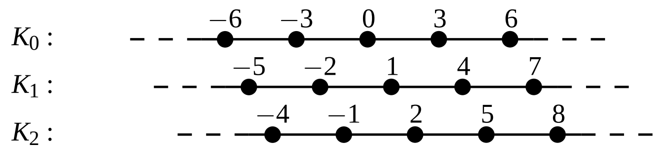
   $$\begin{aligned} K_1 \; &:= \; \{\,k \in \mathbb{Z} \mid (k,1) \in \mathit{Mod3}\,\} \\ &= \; \{\,k \in \mathbb{Z} \mid 3|(k-1)\,\} \\ &= \; \{\,k \in \mathbb{Z} \mid k \bmod 3 = 1\,\}\;. \end{aligned}$$

   Als nächstes nehmen wir eine Zahl in $\mathbb{Z} \setminus (K_0 \cup K_1)$, z.B. 2. Ihre Klasse ist

   $$\begin{aligned} K_2 \; &:= \; \{\,k \in \mathbb{Z} \mid (k,2) \in \mathit{Mod3}\,\} \\ &= \; \{\,k \in \mathbb{Z} \mid 3|(k-2)\,\} \\ &= \; \{\,k \in \mathbb{Z} \mid k \bmod 3 = 2\,\}\;. \end{aligned}$$

   Jetzt ist $\mathbb{Z} \setminus (K_0 \cup K_1 \cup K_2) = \varnothing$ und wir haben alle Klassen gefunden:

   $$K_i \; = \; \{\,k \in \mathbb{Z} \mid k \bmod 3 = i\,\}\;.$$

   Die Werte $i = 0,1,2$ sind genau die möglichen Reste bei Division durch 3, deshalb heißen die K_i in diesem speziellen Fall auch *Restklassen*. Die Relation *Mod3* verallgemeinert sich auf offensichtliche Weise auf beliebige **Mod n** für $n \in \mathbb{N}$. Sie heißt **Kongruenzrelation mit Modul** n.

Eine Äquivalenzrelation ist eine *verallgemeinerte „=“-Beziehung*: die Elemente jeder Klasse werden „gleich“ durch die Bewertung durch das Relationsprädikat. Evtl. vorhandene weitere Eigenschaften, in denen sie sich unterscheiden, werden bewusst ignoriert.

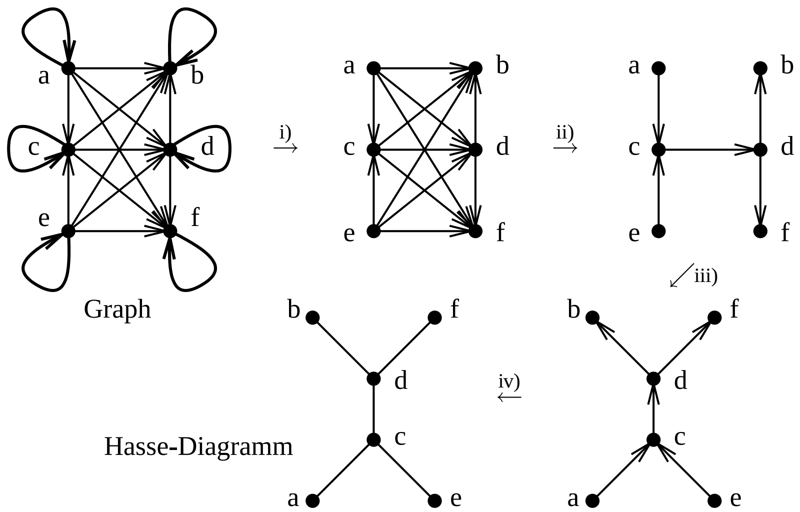
7.11 Ordnungsrelationen

Eine *reflexive, antisymmetrische und transitive* Relation auf G^2 heißt eine **Ordnungsrelation**. Sie hat zwei besondere Eigenschaften:

- sie teilt die Grundmenge G in (meist nicht disjunkte) **Ketten** auf,
- alle Elemente einer solchen Kette sind *paarweise miteinander vergleichbar*.

Um das zu sehen, stellen wir den Graphen einer Ordnungsrelation vereinfacht dar als **Hasse-Diagramm**[19]:

[19] Helmut Hasse, 1898–1979, deutscher Mathematiker



Algorithmus, der aus dem Graphen das Hasse-Diagramm macht:

i) lösche alle Schlingen (sie werden von der Reflexivität impliziert)

ii) lösche alle Kanten, die „Abkürzungen" für längere Wege sind (sie werden von der Transitivität impliziert)

iii) falls $(a,b) \in R$, zeichne Knoten a (schräg) unterhalb von Knoten b,

iv) lösche alle Pfeilspitzen.

Danach dürfen nur noch ungerichtete Kanten zwischen *Nachbarknoten* a,b übrig sein, d.h.

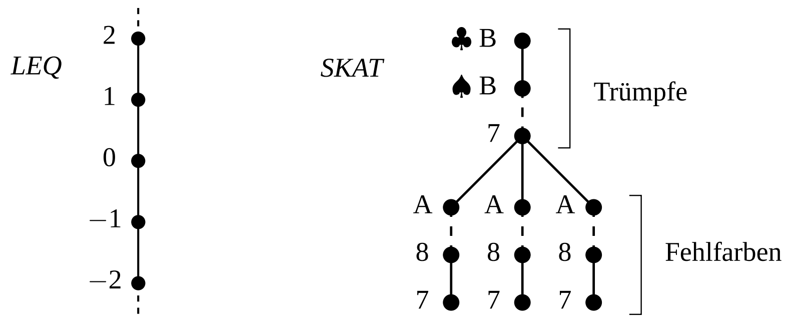
$$(a,b) \in R \wedge \neg\exists c : ((a,c) \in R \wedge (c,b) \in R) .$$

Anschaulich: es gibt im Diagramm keine „Umwege" von a zu b mehr, die nur von unten nach oben verlaufen.

$\longrightarrow$ *Das Hasse-Diagramm ist sozusagen das „Skelett" des Graphen, aus dem er durch die Eigenschaften der Ordnungsrelation wieder rekonstruiert werden kann.*

Beispiele:

1. Unter *LEQ* ist die Menge $\mathbb{Z}$ eine einzige Kette, da alle ganzen Zahlen vergleichbar sind (Bild links).

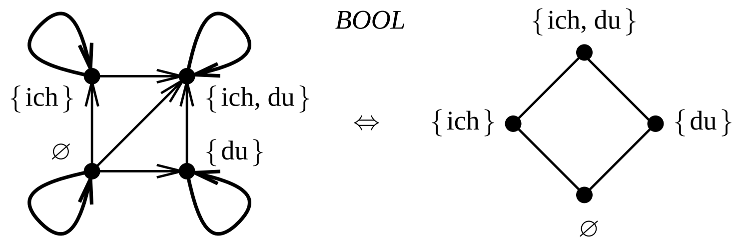


2. Beim Skat besteht $G := \{\text{alle Spielkarten}\}$ aus einer Trumpffarbe und drei Fehlfarben. Die Relation

$$SKAT := \{(x,y) \in G^2 \mid y \text{ sticht } x\}$$

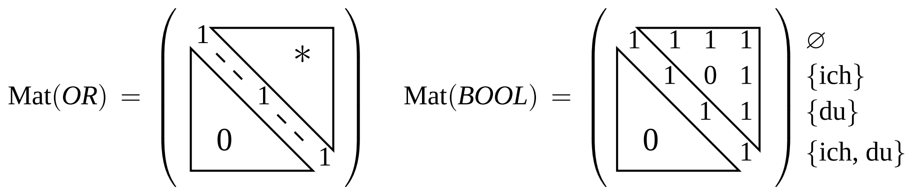
schafft eine Ordnung auf G mit 3 Ketten (Bild rechts). Verschiedene Fehlfarben sind unvergleichbar, hier muss eine andere Regel die Entscheidung treffen $\rightarrow$ Reihenfolge der Ablage.

3. Für $G = \{\text{ich, du}\}$ führt die Relation $BOOL := \{(A,B) \in \mathcal{P}(G)^2 \mid A \subseteq B\}$ zu 2 Ketten:



Anmerkung: im allgemeinen sind es $|G|!$ Ketten.

Die Matrix einer Ordnungsrelation *kann* so geschrieben werden, dass alle vorkommenden 1-Werte *auf und oberhalb der Hauptdiagonalen* stehen. Linkes Bild: im allgemeinen, rechtes Bild: Beispiel *BOOL*.



Eine Ordnungsrelation ist eine *verallgemeinerte „$\leq$"-Beziehung*: die Elemente jeder Kette sind aufsteigend geordnet. Zwei Elemente, die nicht in einer gemeinsamen Kette liegen, sind jedoch *unvergleichbar*.

7.12 Aufgabe. (Übungen zu Struktureigenschaften von Relationen.)

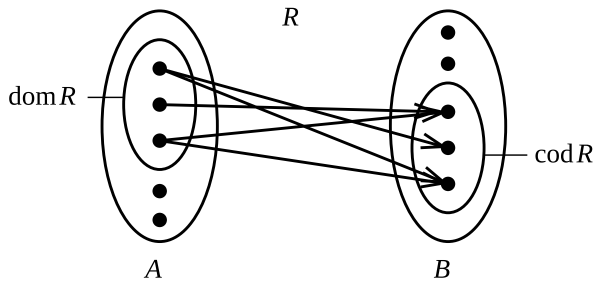
7.13 Abbildungseigenschaften binärer Relationen

Es sei im Weiteren $R \subseteq A \times B$, die Paare haben i.a. verschiedenartige Komponenten. Wir betrachten jetzt, mit *wievielen* Elementen von B die Elemente von A in Relation stehen. Wir setzen

$$\begin{aligned} \mathbf{dom\,R} &:= \{a \in A \mid \exists (a,b) \in R\} \subseteq A & \qquad &\textbf{Domain}\text{ von } R \\ \mathbf{cod\,R} &:= \{b \in B \mid \exists (a,b) \in R\} \subseteq B & \qquad &\textbf{Codomain}\text{ von } R\,. \end{aligned}$$

Die Domain ist diejenige Teilmenge von A, die alle Relationspartner der linken Seite enthält. Analog ist die Codomain diejenige Teilmenge von B, die alle Relationspartner der rechten Seite enthält.

$\longrightarrow$ *Alle Elemente außerhalb von* $\mathrm{dom}\,R$ *oder* $\mathrm{cod}\,R$ *sind an der Relation sozusagen nicht beteiligt.*

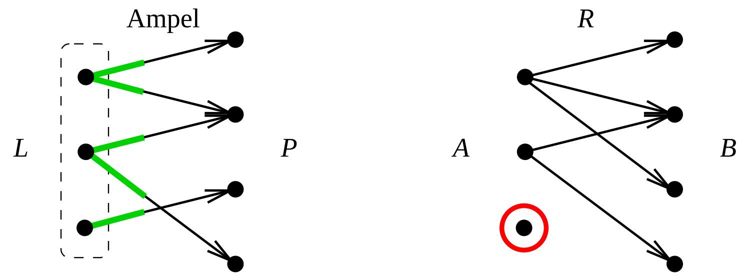


Wir sehen per Definition der inversen Relation sofort:

$$\mathrm{dom}\,R^{-1} = \mathrm{cod}\,R \qquad \text{und} \qquad \mathrm{cod}\,R^{-1} = \mathrm{dom}\,R\,.$$

1. Eine Relation R heißt **linkstotal**, wenn jedes A-Element mit *mindestens* einem B-Element in Relation steht:

$$\boxed{\forall a \in A:\ \exists b \in B:\ (a,b) \in R} \ \Leftrightarrow\ \boxed{\mathrm{dom}\,R = A}\,.$$



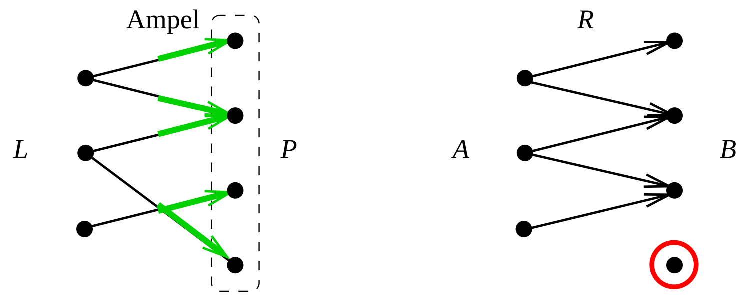
linkstotal　　　　nicht linkstotal

In der Matrix einer linkstotalen Relation enthält jede *Zeile mindestens* eine Eins:

$$\mathrm{Mat}(\text{Ampel}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \mathrm{Mat}(R) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}.$$

2. Analog heißt R **rechtstotal**, wenn jedes Element von B mit *mindestens* einem von A in Relation steht:

$$\boxed{\forall b \in B:\ \exists a \in A:\ (a,b) \in R} \ \Leftrightarrow\ \boxed{\mathrm{cod}\,R = B}\,.$$



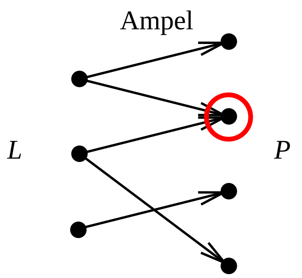
rechtstotal　　　　nicht rechtstotal

Die Matrix einer rechtstotalen Relation enthält jede *Spalte mindestens* eine Eins:

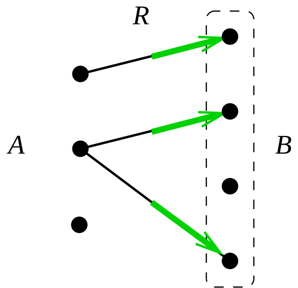
$$\mathrm{Mat}(\text{Ampel}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \mathrm{Mat}(R) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \mathbf{0} \\ 0 & 1 & 1 & \mathbf{0} \\ 0 & 0 & 1 & \mathbf{0} \end{pmatrix}.$$

3. Eine Relation R heißt **linkseindeutig**, wenn jedes B-Element mit *höchstens* einem A-Element in Relation steht:

$$\boxed{(a,b) \in R \wedge (a',b) \in R \ \Rightarrow\ a = a'}\,.$$



nicht linkseindeutig



linkseindeutig

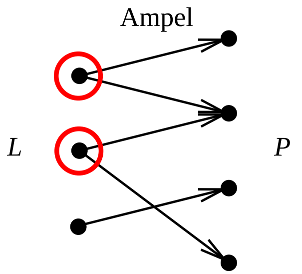
In der Matrix einer linkseindeutigen Relation enthält jede *Spalte höchstens* eine Eins:

$$\mathrm{Mat}(\mathrm{Ampel}) = \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{1} & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{1} & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \mathrm{Mat}(R) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} .$$

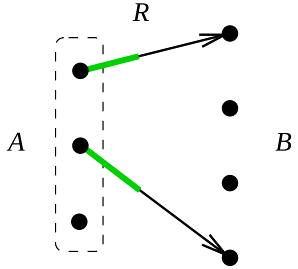
$\longrightarrow$ *Linkseindeutigkeit wird rechts (in B) festgestellt, wirkt sich aber links (in A) aus.*

4. Analog heißt R **rechtseindeutig**, wenn jedes A-Element mit *höchstens* einem B-Element in Relation steht:

$$\boxed{(a,b) \in R \wedge (a,b') \in R \;\Rightarrow\; b = b'} .$$



nicht rechtseindeutig



rechtseindeutig

In der Matrix einer rechtseindeutigen Relation enthält jede *Zeile höchstens* eine Eins:

$$\mathrm{Mat}(\mathrm{Ampel}) = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{1} & 0 & \mathbf{1} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \mathrm{Mat}(R) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} .$$

5. Die beiden Links- bzw. Rechtseigenschaften sind bei R^{-1} vertauscht.

Totalität betrachtet, ob für alle Elemente in A (links) bzw. in B (rechts) *mindestens ein R-Partner existiert*.
Eindeutigkeit betrachtet, ob es für alle Elemente in A (links) bzw. in B (rechts) *höchstens einen R-Partner gibt*.
Ist beides erfüllt, gibt es für alle Elemente *genau einen R-Partner*.

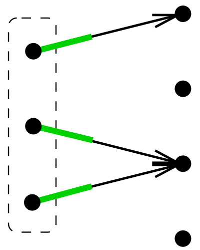
7.14 Funktionen

1. Eine **Abbildung** oder **Funktion** $f : A \to B$ ist eine Relation

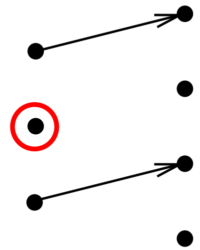
$$F = \{ (x,y) \in A \times B \mid y = f(x) \} ,$$

die *linkstotal* und *rechtseindeutig* ist. Dadurch wird jedem zulässigen Input genau ein Output zugeordnet. f wird zumeist durch eine Abbildungsvorschrift (Formel oder Algorithmus) angegeben.

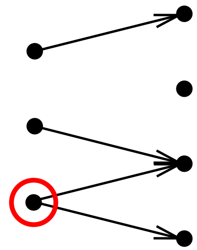
$\longrightarrow$ *Das muss aber nicht so sein. Entscheidend ist die Erfüllung des Prädikats* $y = f(x)$ *, egal wie* f *angegeben wird.*



Funktion



nicht linkstotal



nicht rechtseindeutig

Beispiel: $F := \{ (p,m) \in \{\text{alle Pakete}\} \times \{\text{alle Menschen}\} \mid m = \text{Empfänger}(p) \}$
linkstotal: jedes Paket hat einen Empfänger
rechtseindeutig: kein Paket kann zwei oder mehr Empfänger haben[20].

Wir stellen uns eine Funktion so vor, dass an jedem A-Element genau ein Pfeil befestigt ist, der auf irgendein B-Element weist. Diese Definition bedeutet die saubere mathematische Fundierung des Begriffs *Abbildung* durch die Prädikatenlogik.

2. Die Rechtseindeutigkeit ermöglicht folgende Begriffe:
ist $y = f(x)$, so heißt y *das* **Bild** von x und x *ein* **Urbild** von y.

[20] wir sehen dabei von Sammelanschriften wie „Familie Schmidt“ o.ä. ab

Folgende Mengen werden im Kontext von Funktionen durch eigene Namen neu benannt:

$$\begin{aligned} \mathbf{D_f} &:= \operatorname{dom} F = A && \textbf{Definitionsmenge} \text{ von } f \\ \mathbf{W_f} &:= B && \textbf{Wertemenge} \text{ von } f \\ \mathbf{f(D_f)} &:= \operatorname{cod} F && \textbf{Bildmenge} \text{ von } f\,. \end{aligned}$$

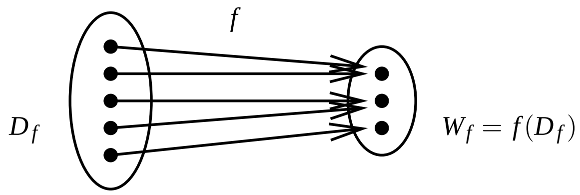
$\longrightarrow$ $\operatorname{dom} F = A$ *folgt aus der Linkstotalität einer Funktion.*

Im Paket-Beispiel: D_f ist die Menge aller Pakete, W_f die Menge aller Menschen, $f(D_f) \subseteq W_f$ die Menge aller Empfänger darunter.

3. Eine Funktion f heißt **surjektiv**, wenn ihre Relation F *rechtstotal* ist, also

$$\operatorname{cod} F = B \;\Leftrightarrow\; \boxed{f(D_f) = W_f} \text{ gilt.}$$

f surjektiv:



Anschaulich: f „überdeckt" die gesamte Wertemenge.

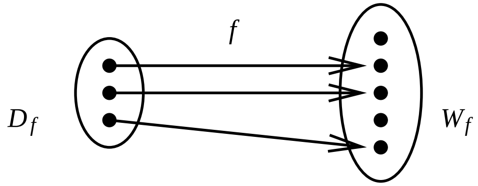
Beispiel:
$F := \{\, (s,z) \in \{\text{alle Studierenden}\} \times \{\text{alle Semesterzahlen}\} \mid z = \text{Fachsemester}(s) \,\}$

linkstotal: alle Studierenden haben eine Semesterzahl
rechtseindeutig: kein/e Studierende/r hat zwei oder mehr Semesterzahlen
rechtstotal: alle Semesterzahlen (1–6) kommen vor.

4. Eine Funktion f heißt **injektiv**, wenn ihre Relation F *linkseindeutig* ist, also

$$\begin{aligned} & (x,y) \in F \wedge (x',y) \in F \;\Rightarrow\; x = x' \\ \Leftrightarrow\; & y = f(x) \wedge y = f(x') \;\Rightarrow\; x = x' \\ \Rightarrow\; & \boxed{f(x) = f(x') \;\Rightarrow\; x = x'} \;\textit{als einzige Lösung}\,. \end{aligned}$$

f injektiv:



Anschaulich: f „streut" die Bilder: verschiedene Urbilder haben verschiedene Bilder.

Beispiel: $F := \{\, (a,s) \in \{\text{alle Anwesenden}\} \times \{\text{alle Sitzplätze}\} \mid s = \text{Stuhl}(a) \,\}$

linkstotal: alle Anwesenden sitzen auf einem Platz
rechtseindeutig: keine zwei oder mehr Anwesenden sitzen auf demselben Platz
linkseindeutig: kein/e Anwesende/r sitzt auf zwei oder mehr Stühlen.

Beispiel für eine Rechnung: $F := \{\, (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 3x - 6 = f(x) \,\}$.
Prüfung der Injektivität:

$$\begin{aligned} f(x) = f(x') \;&\Rightarrow\; 3x - 6 = 3x' - 6 && \mid +6 \\ &\Leftrightarrow\; 3x = 3x' && \mid \cdot \tfrac{1}{3} \\ &\Leftrightarrow\; x = x' \quad \text{als einzige Lösung} && \longrightarrow \text{ injektiv.} \end{aligned}$$

Der Zusatz *als einzige Lösung* ist wichtig, denn $x = x'$ ist immer eine Lösung der Gleichung $f(x) = f(x')$. Es darf *keine andere* geben, damit die gewünschte Eindeutigkeit folgt.

Beispiel einer nicht-injektiven Funktion: $f(x) = x^2$:

$$\begin{aligned} f(x) = f(x') \;&\Rightarrow\; x^2 = x'^2 && \mid -x'^2 \\ &\Leftrightarrow\; x^2 - x'^2 = 0 && \text{3. binomische Formel} \\ &\Leftrightarrow\; (x - x')(x + x') = 0 \\ &\Leftrightarrow\; x = x' \vee x = -x'\,. \end{aligned}$$

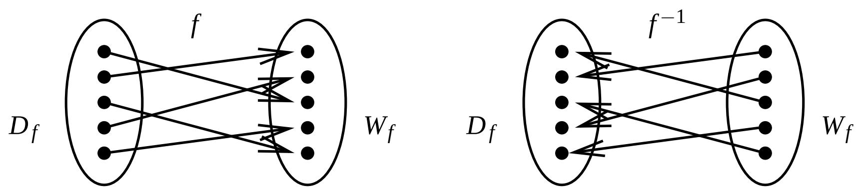
Die zweite Lösung $x = -x'$ verhindert die Injektvität.

5. Ist F injektiv *und* surjektiv, heißt f **bijektiv**. Das bedeutet:

$$\left.\begin{aligned} & f \text{ surjektiv} \;\Leftrightarrow\; F \text{ rechtstotal} \;\Leftrightarrow\; F^{-1} \text{ linkstotal} \\ & f \text{ injektiv} \;\Leftrightarrow\; F \text{ linkseindeutig} \;\Leftrightarrow\; F^{-1} \text{ rechtseindeutig} \end{aligned}\right\} \;\Rightarrow\; F^{-1} \textit{ Funktion!}$$

Wir nennen F^{-1} *die* **Umkehrfunktion** $\mathbf{f^{-1}} : W_f \rightarrow D_f$ von f (lies: „f invers"):

$$F^{-1} = \{\, (y,x) \in W_f \times D_f \mid y = f(x) \,\}\,.$$



Beispiel: $F := \{ (e,p) \in \{\text{alle Eintrittskarten}\} \times \{\text{alle Plätze}\} \mid p = \text{Aufschrift}(e) \}$

linkstotal: jedes Ticket gehört zu einem Platz
rechtseindeutig: kein Ticket kann zu zwei oder mehr Plätzen gehören
rechtstotal: zu allen Plätzen gehört eine Karte
linkseindeutig: zu keinem Platz gehört mehr als eine Karte.

Karten und Plätze entsprechen einander **1:1**. Von der Karte kann man immer eindeutig auf den zugehörigen Platz schließen (das passiert bei jedem Einlass) und umgekehrt.

Diese Beziehung bedeutet eine allgemeine Antwort auf die Frage, wann wir eine Gleichung $y = f(x)$ nach x auflösen können: genau dann, wenn die durch das Prädikat $y = f(x)$ definierte Relation F alle vier Eigenschaften *linkstotal, rechtstotal, linkseindeutig, rechtseindeutig* besitzt. Die Umkehrung ist dann gegeben durch die inverse Relation F^{-1}.

f^{-1} ist immer eindeutig oder existiert nicht! f^{-1} hat folgende Eigenschaften:

$$\boxed{\begin{aligned} f(x) &= y &&\Leftrightarrow\quad x = f^{-1}(y) \\ F^{-1} \circ F &= I_{D_f} &&\Leftrightarrow\quad \forall x \in D_f : f^{-1}(f(x)) = x \\ F \circ F^{-1} &= I_{W_f} &&\Leftrightarrow\quad \forall y \in W_f : f(f^{-1}(y)) = y\,. \end{aligned}}$$

Die erste Eigenschaft folgt aus der Tatsache, dass F^{-1} zum einen die Funktionsdarstellung $x = f^{-1}(y)$ hat, zum anderen aber per Definition 7.5 dasselbe Prädikat wie F selbst: $f(x) = y$. Diese beiden müssen demnach äquivalent sein!
Beispiel für eine Umformung von f nach f^{-1}:

$$\begin{aligned} f(x) &= y = 3x - 6 && \mid +6 \\ \Leftrightarrow\ y + 6 &= 3x && \mid \cdot \tfrac{1}{3} \\ \Leftrightarrow\ \tfrac{1}{3}y + 2 &= x = f^{-1}(y)\,. \end{aligned}$$

Achtung: Es muss nicht immer eine *Formel* (Funktionsterm) für f^{-1} geben! Beispiele:

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\,, \quad f(x) = x + x^5 \quad \text{oder} \quad f(x) = x + 5^x\,.$$

Diese beiden Funktionen sind bijektiv, also prinzipiell eindeutig umkehrbar. Es gibt aber keine expliziten Formeln für die Umkehrfunktionen.

7.15 Aufgabe. (Übungen zu Abbildungseigenschaften von Relationen.)

8 Elemente der Analysis

8.0 Aufgabe. (Vorbereitende Übungen zu reellen Funktionen.)

8.1 Grundbegriffe

1. Ein **Intervall** ist eine *zusammenhängende* Teilmenge reeller Zahlen, z.B.

$$\begin{aligned} [a,b] &:= \{x \in \mathbb{R} \mid a \le x \le b\} \quad \text{für zwei } \textbf{Grenzen } a,b \in \mathbb{R} \\ ]a,b[&:= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\} \\ [a,\infty[&:= \{x \in \mathbb{R} \mid a \le x\} \\ ]-\infty,b[&:= \{x \in \mathbb{R} \mid x < b\} \end{aligned}$$

   Zwei Regeln bestimmen die Syntax (vergl. obige Definitionen):

   - Klammer nach innen *(geschlossen)*: Grenze gehört zur Menge
     Klammer nach außen *(offen)*: Grenze gehört nicht zur Menge
   - linke Grenze $= -\infty$: keine Begrenzung nach links, Klammer offen: $]-\infty$
     rechte Grenze $= \infty$: keine Begrenzung nach rechts, Klammer offen: $\infty[$

   Es gibt vier spezielle Intervalle, die oft benötigt werden:

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^+ &:= \,]0,\infty[\qquad & \mathbb{R}_0^+ &:= [0,\infty[\\ \mathbb{R}^- &:= \,]-\infty,0[\qquad & \mathbb{R}_0^- &:= \,]-\infty,0]\,. \end{aligned}$$

2. Eine **reelle Funktion** ist eine Abbildung

$$f : D_f \to W_f\,, \quad \text{wobei } D_f, W_f \subseteq \mathbb{R}\,.$$

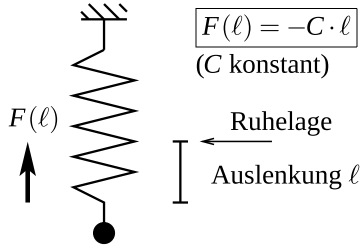
   Damit sind zusammenhängende Teilmengen von $\mathbb{R}$ gemeint oder solche mit wenigen Ausnahmen, z.B. Intervalle oder deren Vereinigung. Nicht gemeint sind „verstreute" Teilmengen wie etwa $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ oder $\mathbb{Q}$.

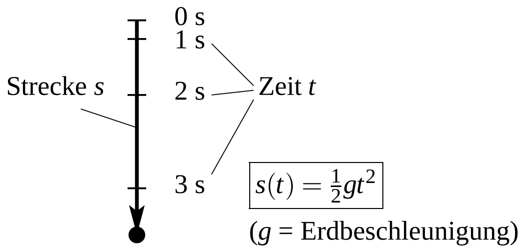
Die grundlegendsten reellen Funktionen sind Potenzen und Polynome, Exponentiale und Logarithmen, Winkelfunktionen und deren Inverse.

Potenzfunktionen

8.2 Problemstellungen

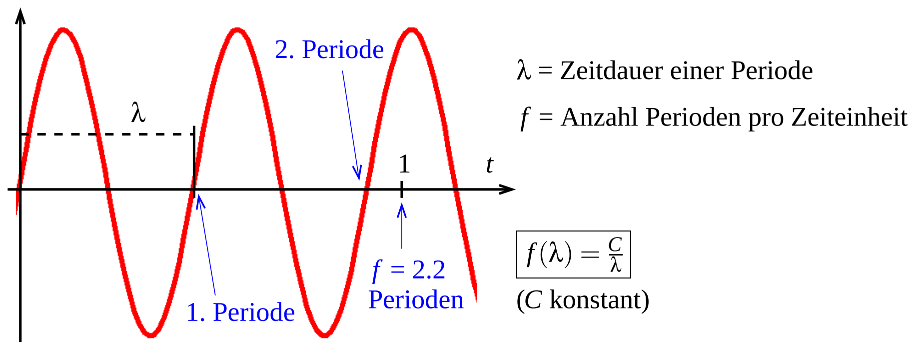
1. Wie hängt die Rückstellkraft F einer Feder mit ihrer Auslenkung ℓ aus der Ruhelage zusammen?



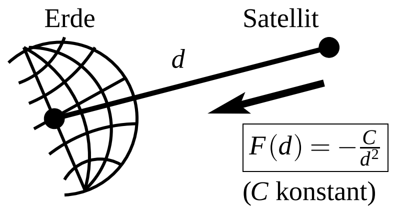


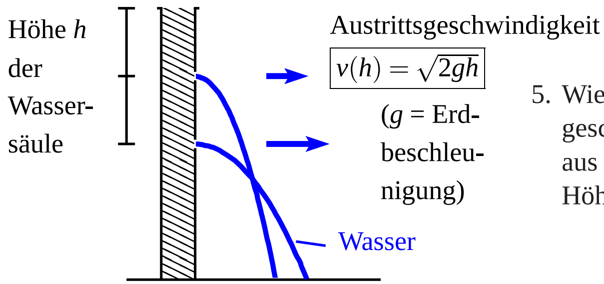
2. Wie nimmt die zurückgelegte Strecke s eines frei fallenden Körpers mit der Zeit zu?

3. Wie hängen Frequenz f und Wellenlänge λ einer Schwingung zusammen?



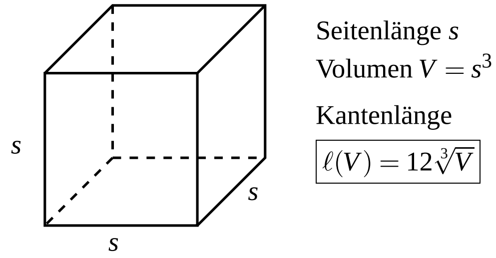
4. Wie nimmt die Erdanziehung F mit wachsender Entfernung d vom Erdmittelpunkt ab?





5. Wie nimmt die Austrittsgeschwindigkeit von Wasser aus einem Rohr zu mit der Höhe der Drucksäule?

6. Wie lang muss ein Draht sein, aus dem Sie die Kanten eines Würfels mit bekanntem Volumen V formen?



8.3 Potenzfunktion

Sei $n \in \mathbb{N}$. Die Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\,, \quad f(x) = \underbrace{x \cdot x \cdot \ldots \cdot x}_{n \text{ mal}} =: x^n$$

heißt **Potenzfunktion**. x heißt die **Basis** von f und n der **Exponent**.

$\longrightarrow$ Diese Funktion entsteht als Abkürzung für mehrfache Multiplikation derselben Zahl, so wie die Multiplikation selbst eine Abkürzung für mehrfache Addition derselben Zahl ist. Wir wollen diese Definition auf andere als natürliche Exponenten erweitern.

8.4 Rechengesetze der Potenzfunktionen

1. Gleiche Basen:

$$x^m \cdot x^n = \underbrace{(x \cdot \ldots \cdot x)}_{m \text{ mal}} \cdot \underbrace{(x \cdot \ldots \cdot x)}_{n \text{ mal}} = \underbrace{x \cdot \ldots \cdot x}_{m+n \text{ mal}} = x^{m+n}\,.$$

2. Gleiche Exponenten:

$$x^n \cdot y^n = \underbrace{(x \cdot \ldots \cdot x)}_{n \text{ mal}} \cdot \underbrace{(y \cdot \ldots \cdot y)}_{n \text{ mal}} = \underbrace{xy \cdot \ldots \cdot xy}_{n \text{ mal}} = (xy)^n\,.$$

3. Spezielle Werte für alle n:

$$0^n = \underbrace{0 \cdot \ldots \cdot 0}_{n \text{ mal}} = 0 \qquad\qquad 1^n = \underbrace{1 \cdot \ldots \cdot 1}_{n \text{ mal}} = 1\,.$$

4. Dies alles gilt nur für natürliche Exponenten ($n \geq 1$). Was ist x^0 ?

$$\begin{aligned} x \cdot x^0 &= x^{1+0} = x^1 = x \qquad\qquad |:x \quad \text{für } x \neq 0 \\ \Leftrightarrow\ x^0 &= 1\,. \end{aligned}$$

$\longrightarrow$ *Die Ausnahme* $x \neq 0$ *müssen wir machen, weil wir sonst nicht durch x teilen können. Sie ist aber auch deshalb wichtig, um einen Widerspruch zu* $0^n = 0$ *zu vermeiden.*

Der Ausdruck 0^0 stellt einen Konfliktfall zwischen zwei Regeln dar und ist deshalb im allgemeinen nicht definiert.

5. Negative Exponenten:

$$x^{-n} \cdot x^n = x^{-n+n} = x^0 = 1 \ \Leftrightarrow\ x^{-n} = \frac{1}{x^n} \quad \text{für } x \neq 0\,.$$

$\longrightarrow$ *Die Ausnahme* $x \neq 0$ *kommt durch die Verwendung von* x^0 *hinein.*

6. Differenzen im Exponenten:

$$x^{m-n} = x^m \cdot x^{-n} = x^m \cdot \frac{1}{x^n} = \frac{x^m}{x^n} \quad \text{für } x \neq 0\,.$$

$\longrightarrow$ *Die Ausnahme* $x \neq 0$ *kommt durch die Verwendung von* x^{-n} *hinein.*

7. Verkettung von Potenzfunktionen:

$$(x^m)^n = \underbrace{x^m \cdot \ldots \cdot x^m}_{n \text{ mal}} = x^{\overbrace{m+\ldots+m}^{n \text{ mal}}} = x^{m \cdot n}\,.$$

8. Rationale Exponenten: was ist $x^{\frac{m}{n}}$ $(n \neq 0)$? Wir wissen:

$$x^{\frac{m}{n}} = x^{\frac{1}{n} \cdot m} = (x^{\frac{1}{n}})^m\,,$$

wir müssen also nur klären, was $x^{\frac{1}{n}}$ ist.
Idee: setze $x^{\frac{1}{n}}$ in $f(x) = x^n$ ein:

$$f(x^{\frac{1}{n}}) = (x^{\frac{1}{n}})^n = x^{\frac{n}{n}} = x \quad \text{für alle } x\,.$$

Das ist die Bedingung für die Umkehrfunktion von f !

$$\Leftrightarrow\ x^{\frac{1}{n}} = f^{-1}(x)\,.$$

Für welche x und n existiert f^{-1} *denn, d.h. wann ist f bijektiv?* Wir untersuchen das als nächstes, brauchen dafür aber vorher noch weitere Hilfsmittel.

8.5 Definition.

1. Eine reelle Funktion f heißt

$$\begin{aligned} \textbf{gerade} &:\Leftrightarrow\ \forall x \in D_f : (\,-x \in D_f \ \wedge\ f(-x) = f(x)\,) \\ \textbf{ungerade} &:\Leftrightarrow\ \forall x \in D_f : (\,-x \in D_f \ \wedge\ f(-x) = -f(x)\,)\,. \end{aligned}$$

$\longrightarrow$ *Zur Anschauung dieser Eigenschaften siehe Beispiele in 8.6 .*

2. Sei $I \subseteq D_f$ ein beliebiges Intervall. Eine reelle Funktion f heißt

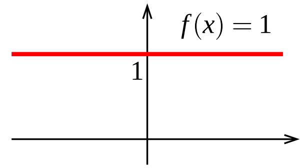
$$\begin{aligned} \textbf{monoton steigend} &:\Leftrightarrow\ \forall x, x' \in I : (x < x' \ \rightarrow\ f(x) \leq f(x')\,) \\ \textbf{streng monoton steigend} &:\Leftrightarrow\ \forall x, x' \in I : (x < x' \ \rightarrow\ f(x) < f(x')\,)\,. \end{aligned}$$

Analog heißt f **(streng) monoton fallend**, wenn aus $x < x'$ folgt:
$f(x) \geq f(x')$ bzw. $f(x) > f(x')$.

$\longrightarrow$ *Die Einschränkung auf Intervalle I ist wichtig, weil Monotonie nur auf* zusammenhängenden *Mengen definiert ist! Wir dürfen keine Werte vergleichen, zwischen denen Definitionslücken existieren.*

8.6 Beispiel.

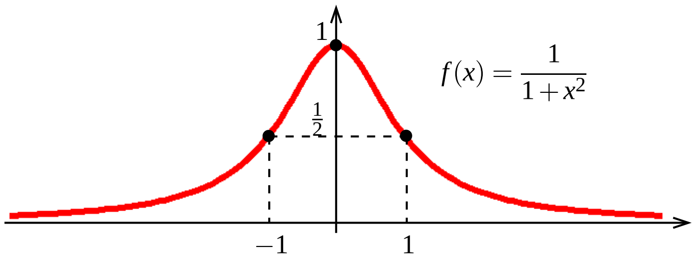
1. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 1$ ist gerade, monoton steigend und fallend: $f(-x) = 1 = f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$.



2. $f : \mathbb{R} \rightarrow\,]0,1]$, $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ ist gerade, aber nicht monoton:

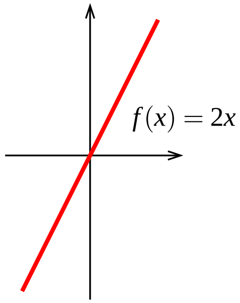
$$f(-x) = \frac{1}{1+(-x)^2} = \frac{1}{1+x^2} = f(x) \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}\,,$$

aber $f(-1) = f(1) = \frac{1}{2}$, $f(0) = 1$.



→ *Der Graph einer geraden Funktion ist geometrisch symmetrisch zur* y-Achse.

3. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = 2x$ ist ungerade und streng monoton steigend:



$$f(-x) = 2(-x) = -(2x) = -f(x)$$

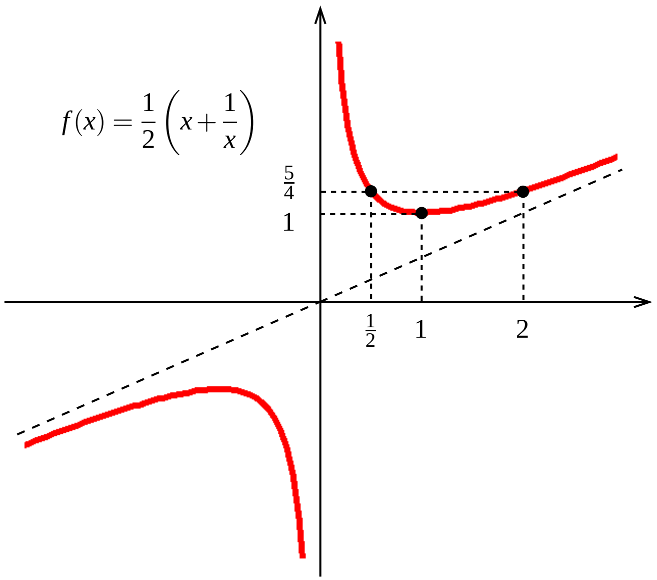
und

$$x < x' \ \Leftrightarrow\ 2x < 2x' \ \Rightarrow\ f(x) < f(x')\,.$$

4. $f : \mathbb{R}\setminus\{0\} \to \mathbb{R},\ f(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{x}\right)$ ist ungerade, aber nicht monoton:

$$f(-x) = \frac{1}{2}\left(-x + \frac{1}{-x}\right) = -\frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{x}\right) = -f(x)\,,$$

aber $f(\frac{1}{2}) = f(2) = \frac{5}{4},\ f(1) = 1$.



→ *Der Graph einer ungeraden Funktion ist geometrisch symmetrisch zum* Ursprung.

→ *Beachten Sie, dass die Widerlegung der Monotonie nur auf ein und derselben Seite der y-Achse erfolgt! Über die Definitionslücke 0 hinweg ist die Monotonie nicht definiert.*

8.7 Umkehrfunktion der Potenzfunktion

Wir nennen die Umkehrfunktion der Potenzfunktion $f(x) = x^n$ die **n. Wurzel**

$$f^{-1}(x) = \boxed{\sqrt[n]{x} := x^{\frac{1}{n}}}\,.$$

Sie ist wieder eine Potenzfunktion. Wir betrachten zunächst nur $n \in \mathbb{N}$.

1. Es gilt:

$$f(-x) = [(-1)x]^n = (-1)^n x^n = \begin{cases} x^n = f(x) & \text{für } n \text{ gerade} \\ -x^n = -f(x) & \text{für } n \text{ ungerade,} \end{cases}$$

   d.h. f ist entweder gerade oder ungerade. Wir können uns daher in beiden Fällen beschränken auf $\mathbb{R}_0^+$.

2. *Untersuchung der Injektivität auf* $\mathbb{R}_0^+$, *z.z.:* $x \neq x' \overset{?}{\Rightarrow} f(x) \neq f(x')$.

   Sei $x \neq x'$. Da beide austauschbar sind, können wir auch $x < x'$ annehmen. Wir sehen:

$$\begin{aligned} f(x) - f(x') &= x^n - x'^n \\ &= \underbrace{(x - x')}_{<0}\underbrace{(\overbrace{x^{n-1}}^{\geq 0} + \overbrace{x^{n-2}x'}^{\geq 0} + \ldots + \overbrace{xx'^{n-2}}^{\geq 0} + \overbrace{x'^{n-1}}^{>0})}_{>0} \\ &< 0 \\ \Rightarrow\ f(x) &< f(x')\,, \end{aligned}$$

   d.h. f ist streng monoton steigend und damit injektiv auf $\mathbb{R}_0^+$.

   → *Diese Produktdarstellung von* $x^n - x'^n$ *zeigen Sie in Aufgabe 8.8.*

   → *Den Zusammenhang von Monotonie und Injektivität zeigen Sie in Aufgabe 8.0.*

3. *Untersuchung der Surjektivität auf* $\mathbb{R}_0^+$, *z.z.:* $f(\mathbb{R}_0^+) = \mathbb{R}_0^+$.

   a) $n = 1$.
   Dann ist $f(x) = x^1$ die Identität, also per Definition surjektiv.

   b) $n \geq 2,\ x \geq 1$.
   Aus der Monotonie $1 \leq x \ \Rightarrow\ 1^{n-1} \leq x^{n-1}$ schließen wir:

$$f(x) = x^n = x^{n-1} \cdot x \geq 1^{n-1} \cdot x = x\,,$$

   d.h. $f(x) \geq x$. f wächst mindestens so schnell wie x selbst und nimmt deshalb alle Werte in $[1, \infty[$ an:

$$\Rightarrow\ f([1,\infty[) = [1,\infty[\,.$$

c) $n \geq 2,\ 0 \leq x \leq 1$.
Aus der Monotonie $x \leq 1 \;\Rightarrow\; x^{n-1} \leq 1^{n-1}$ schließen wir:

$$0 \;=\; f(0) \;\leq\; f(x) \;=\; x^n \;=\; x^{n-1} \cdot x \;\leq\; 1^{n-1} \cdot x \;=\; x\,,$$

d.h. $0 \leq f(x) \leq x$. f fällt mindestens so schnell wie x selbst und nimmt deshalb alle Werte in $[0,1]$ an:

$$\Rightarrow\quad f([0,1]) \;=\; [0,1]\,.$$

$\longrightarrow$ *Hier ist ein Zeitverlauf in Linksrichtung gemeint, von 1 zur 0.*

Beide Teile zusammen setzen:

$$f(\mathbb{R}_0^+) \;=\; f([0,1] \cup [1,\infty[) \;=\; f([0,1]) \cup f([1,\infty[) \;=\; [0,1] \cup [1,\infty[= \mathbb{R}_0^+\,.$$

4. *Untersuchung der Bijektivität auf* $\mathbb{R}$.
Mit Hilfe der (Un-)Geradheit schließen wir auf $\mathbb{R}^-$:

a) f ungerade und $x < 0$.

$$f(x) \;=\; -f(\overset{>0}{\overbrace{-x}}) \underset{>0}{\underbrace{}} \;<\; 0 \quad\Rightarrow\quad f(\mathbb{R}^-) \;=\; \mathbb{R}^-\,.$$

Beide Hälften zusammen setzen:

$$f(\mathbb{R}) \;=\; f(\mathbb{R}_0^+ \cup \mathbb{R}^-) \;=\; f(\mathbb{R}_0^+) \cup f(\mathbb{R}^-) \;=\; \mathbb{R}_0^+ \cup \mathbb{R}^- \;=\; \mathbb{R}\,,$$

d.h. f ist surjektiv auf ganz $\mathbb{R}$.
Bei Spiegelung des Graphen von f bleibt die Injektivität erhalten, d.h. f ist auf ganz $\mathbb{R}$ injektiv. $\longrightarrow$ *Diesen Zusammenhang zeigen Sie in Aufgabe 8.0.*
Ergebnis: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist bijektiv.

b) f gerade und $x < 0$.
Dann kann f wegen $f(x) = f(-x)$ nicht injektiv sein. Weiter ist $f(\mathbb{R}^-) = f(\mathbb{R}^+) \;\Rightarrow\; f$ ist surjektiv nur auf $\mathbb{R}_0^+$.
Ergebnis: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_0^+$ ist nicht bijektiv, kann nur durch Einschränkung auf $D_f := \mathbb{R}_0^+$ bijektiv gemacht werden.
$\longrightarrow$ *Das ist eine* Konvention, $\mathbb{R}_0^-$ *wäre auch möglich.*

5. *Folgerung für* $f^{-1}(x) = \sqrt[n]{x}\ (n \geq 1)$.
Die Umkehrung erhält die Monotonie, daher ist f^{-1} stets streng monoton steigend. $\longrightarrow$ *Das zeigen Sie in Aufgabe 8.0.*

a) n ungerade.
$f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist ungerade, weil die Umkehrung die Ungeradheit erhält.
$\longrightarrow$ *Letzteres zeigen Sie in Aufgabe 8.0.*

b) n gerade.
$f^{-1} : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^+$ ist weder gerade noch ungerade, weil $\mathbb{R}^-$ fehlt.

6. *Folgerung für* $f(x) = x^n$ *für* $n \leq -1$.
Sei $m := -n \geq 1$. Wie schon in 8.4.5 gesehen, bilden wir eigentlich den Kehrwert einer Potenzfunktion mit positivem Exponenten:

$$f(x) \;=\; x^n \;=\; \frac{1}{x^m}\,.$$

Wir bekommen die Definitionslücke $x \neq 0$.
Die (Un-)Geradheit bleibt dabei erhalten:

$$f(-x) \;=\; \frac{1}{(-x)^m} \;=\; \frac{1}{(-1)^m\, x^m} \;=\; (-1)^m \frac{1}{x^m} \;=\; \begin{cases} f(x) & \text{für } m \text{ gerade,} \\ -f(x) & \text{für } m \text{ ungerade.} \end{cases}$$

Der Kehrwert dreht aber die Monotonie um:

$$x < x' \;\;\Rightarrow\;\; x^m < x'^m \;\;\Rightarrow\;\; f(x) = x^n = \frac{1}{x^m} > \frac{1}{x'^m} = x'^n = f(x')\,.$$

Wir folgern daraus direkt:

a) n ungerade.
$f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R} \setminus \{0\}$, f ist ungerade und streng monoton fallend.

b) n gerade.
$f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^+$, f ist gerade und auf $\mathbb{R}^-$ streng monoton steigend, auf $\mathbb{R}^+$ streng monoton fallend. Wird durch Einschränkung auf $\mathbb{R}^+$ bijektiv.

In beiden Fällen erhält die Umkehrung diese Eigenschaften und sie gelten genauso für $f^{-1}(x) = \sqrt[n]{x}$.

7. *Zusammenfassung der Ergebnisse.*

	$n \in \mathbb{N}$ ungerade		$n \in \mathbb{N}$ gerade		
	$D_f \to f(D_f)$	mon.	$D_f \to f(D_f)$	mon.	(un-)gerade
x^n	$\mathbb{R} \to \mathbb{R}$	$\nearrow$	$\mathbb{R} \to \mathbb{R}_0^+$	$\mathbb{R}_0^- \searrow$, $\mathbb{R}_0^+ \nearrow$	gerade
x^{-n}	$\mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R} \setminus \{0\}$	$\searrow$	$\mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^+$	$\mathbb{R}^- \nearrow$, $\mathbb{R}^+ \searrow$	gerade
$x^{\frac{1}{n}}$	$\mathbb{R} \to \mathbb{R}$	$\nearrow$	$\mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^+$	$\nearrow$	weder noch
$x^{-\frac{1}{n}}$	$\mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R} \setminus \{0\}$	$\searrow$	$\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$	$\searrow$	weder noch
	immer ungerade, bijektiv		nur eingeschränkt bijektiv		

8.8 Aufgabe. (Übungen zu Potenzfunktionen.)

8.9 Ergänzungen zu Potenzfunktionen

1. Wir haben $f(x) = x^r$ definiert für $r \in \mathbb{Q}$. Man kann f auch für $r \in \mathbb{R}$ sinnvoll definieren. Die Umkehrfunktion bleibt $f^{-1}(x) = x^{\frac{1}{r}}$.
2. Die Graphen von x^r heißen

Parabeln	für $r > 1$,
Identität	für $r = 1$,
Wurzelfunktionen	für $r \in \,]-1,1[\,\setminus\{0\}$,
Konstante	für $r = 0$,
Hyperbeln	für $r < -1$.

3. Das Gesetz $(ax)^n = a^n x^n$ bedeutet

$$\boxed{f(a \cdot x) \;=\; f(a) \cdot f(x)}$$

und stellt eine wichtige **Funktionalgleichung** für Potenzfunktionen dar. Der Faktor $f(a)$ ist konstant und hängt nur vom Faktor a im Argument und von f selbst ab. Es kommt insbesondere nicht auf die absolute Größe von x an!

Beispiele: nochmals die Probleme 8.2.

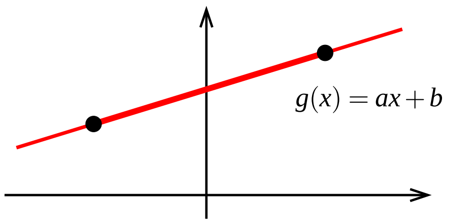
1. Die Rückstellkraft einer Feder ist *proportional* zur Auslenkung, $F(a\,\ell) = a\,F(\ell)$.
2. Ein Körper fällt *quadratisch* schnell, d.h. in a-facher Zeit a^2-mal so tief: $s(at) = a^2\,s(t)$. Z.B. in doppelter Zeit 4-mal so tief.
3. Frequenz und Wellenlänge einer Schwingung sind *umgekehrt proportional* zueinander: $f(a\lambda) = \frac{1}{a}\,f(\lambda)$.
4. Die Erdanziehung nimmt mit der Entfernung vom Erdmittelpunkt *quadratisch ab*: $F(ad) = \frac{1}{a^2}\,F(d)$.
5. Die Austrittsgeschwindigkeit von Wasser nimmt mit der Wurzel der Wassersäulenhöhe zu: $v(ah) = \sqrt{a}\,v(h)$.
6. Der Draht für die Kanten eines Würfels mit Volumen V hat die Länge $L(V) = 12\sqrt[3]{V}$, nimmt also recht langsam zu: $L(aV) = \sqrt[3]{a}\,L(V)$. Erst bei 8-fachem Volumen brauchen Sie doppelt soviel Draht.

Rationale Funktionen

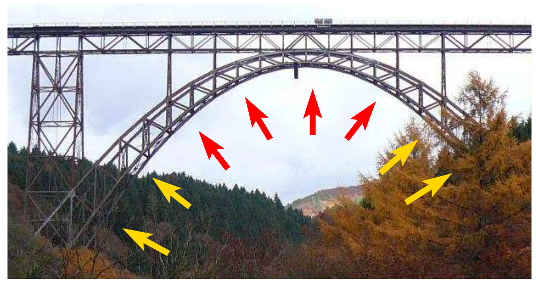
8.10 Weitere Problemstellungen

1. Welchen Verlauf hat in der Ebene die kürzeste Verbindung zwischen zwei Punkten A und B ?

Antwort: eine gerade Strecke, Teilgraph einer Geraden $g(x) = ax + b$.



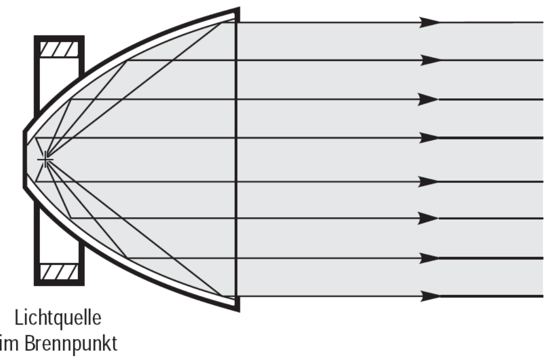
2. Welche Form kann der Spannbogen einer Brücke haben, damit er stabil ist?



Antwort: ein *Parabelbogen* $p(x) = ax^2 + bx + c$

Müngstener Wupperbrücke, gebaut 1897

3. Wie muss ein Reflektor gebogen sein, um Licht parallel zu machen oder auf einen Punkt zu bündeln?
Antwort: ebenfalls ein Parabelbogen.



4. Welcher Kurve folgt eine Achterbahn?

Port Aventura, Spanien

Antwort: in Teilstücken jeweils *kubischen Parabeln* $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$.

Melbourne, Australien

5. Wie kann man die Quadratwurzel um $x = 1$ herum möglichst genau ausrechnen, wenn man nur addieren und multiplizieren darf?

   Antwort: mit dieser Funktion (siehe Bilder auf Folgeseiten):

$$\sqrt{x+1} \approx 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{8}x^3 - \frac{5}{128}x^4 .$$

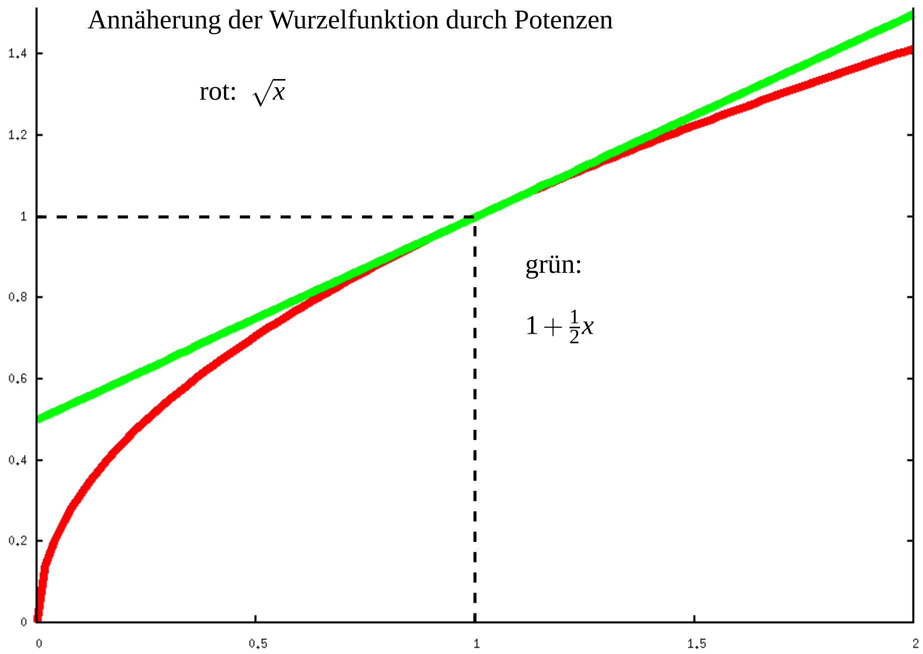
8.11 Polynome

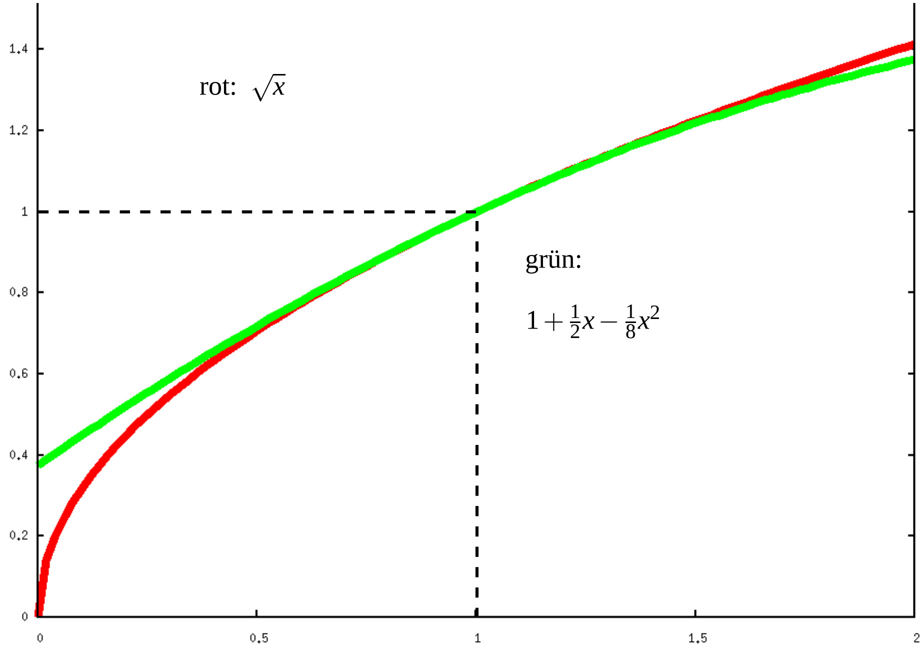
Eine Funktion $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ der Form

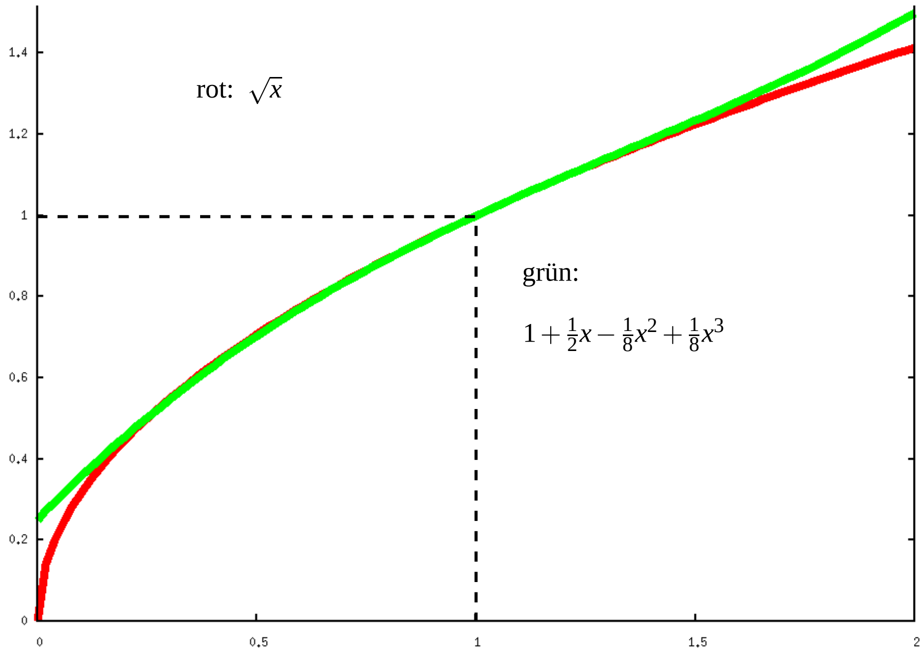
$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 \quad \text{mit } a_i \in \mathbb{R},\ a_n \neq 0$$

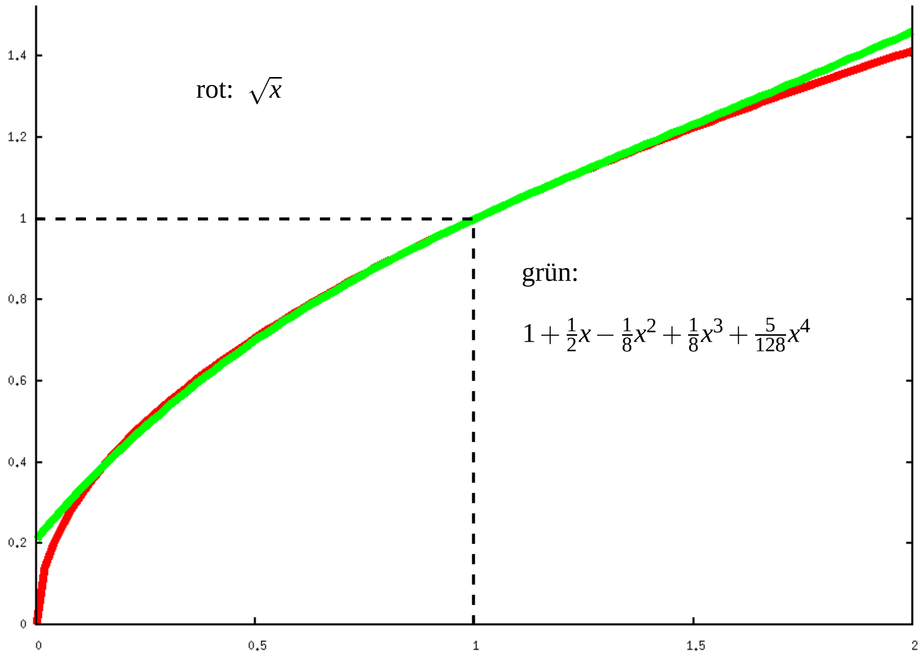
heißt ein **Polynom**. Die höchste auftretende Potenz n heißt der **Grad** von p, kurz **deg p** (von engl. *degree*). Konstante Funktionen $p(x) = a_0$ haben Grad 0.
$\longrightarrow$ *Polynome sind die allgemeinsten Funktionen, wenn man nur addiert und multipliziert.*

8.12 Auswertung von Polynomen









Algorithmus **HORNER**$(p,\ x_0)$

Input: Polynom $p(x)=a_nx^n+\ldots+a_0$ und $x_0\in\mathbb{R}$
Output: Funktionswert $p(x_0)$

initialisiere *result* $:= a_n$
for $i:=n-1$ **to** 0 **step** -1 **do**
  result $:=$ *result* $\cdot x_0 + a_i$

return *result*

Die regelmäßige Struktur der Polynome erlaubt eine einfache und sparsame Auswertung, ohne explizite Potenzen zu bilden:

$$\begin{aligned} & a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+a_{n-2}x^{n-2}+\ldots+a_1x+a_0 \\ =\ & (\ldots((a_nx+a_{n-1})x+a_{n-2})x+\ldots+a_1)x+a_0\,. \end{aligned}$$

Dies ermöglicht das sog. **Horner-Schema**[21]. Algorithmisch wird es durch den Pseudocode *HORNER* beschrieben.
Beispiel: Auswertung des folgenden Polynoms an der Stelle $x_0=3$:

$$2x^4-3x^3-5x^2+2x+8 \;=\; (((2x-3)x-5)x+2)x+8$$

- direkt mit Potenzen (linke Seite):

$$\begin{aligned} & 2\cdot 3^4 - 3\cdot 3^3 - 5\cdot 3^2 + 2\cdot 3 + 8 \\ =\ & 162 - 81 - 45 + 6 + 8 = 50\,. \end{aligned}$$

- nach Horner (rechte Seite):

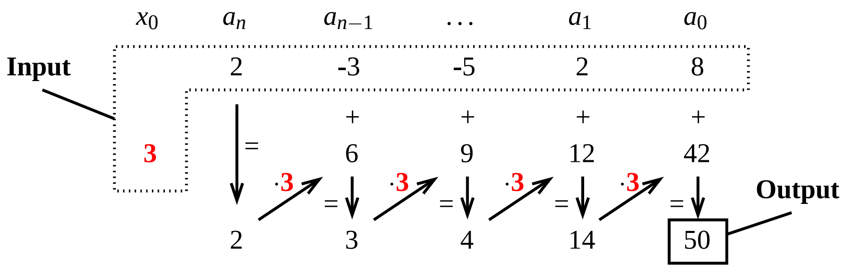
$$\begin{aligned} & (((\underbrace{2\cdot 3-3}_{})\cdot 3-5)\cdot 3+2)\cdot 3+8 \\ =\ & ((\underbrace{\mathbf{3}\cdot 3-5}_{})\cdot 3+2)\cdot 3+8 \\ =\ & (\underbrace{\mathbf{4}\cdot 3+2}_{})\cdot 3+8 \\ =\ & \underbrace{\mathbf{14}\cdot 3+8}_{} \\ =\ & \mathbf{50}\,. \end{aligned}$$

In jedem Schritt wird die jeweils innerste Klammer ausgerechnet, das Ergebnis erscheint fett in der nächsten Zeile.

$\longrightarrow$ Statt „großer“ Zwischenergebnisse für die Potenzen treten beim Horner-Schema eher moderate Zahlen auf, die der Reihe nach zusammengefasst werden.

Als Ablaufschema notiert:

[21] William George Horner, britischer Mathematiker, 1786–1837



Die oben fett gedruckten Zwischenergebnisse erscheinen in der untersten Zeile.

8.13 Eigenschaften von Polynomen

1. Polynomen sind *abgeschlossen* unter Addition und Multiplikation:

$$\boxed{p,q \text{ Polynome } \Rightarrow p+q \text{ und } p\cdot q \text{ Polynome}}$$

→ Warum ist die Subtraktion darin ebenfalls enthalten?

Beispiel: $p(x)=x^3+2x^2-3x-4\,,\quad q(x)=3x^2+6x-1\,,\quad r(x)=-3x^2+x+5$

$$\begin{aligned} p(x)+q(x) &= (\mathbf{x^3}+2x^2-3x-4)+(3\mathbf{x^2}+6x-1)\\ &= \mathbf{x^3}+(2+3)\mathbf{x^2}+(-3+6)x+(-4-1)\\ &= \mathbf{x^3}+5x^2+3x-5\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \deg(p+q) = 3 = \deg p\,,$$

weil p den größeren Grad von beiden hat.

$$\begin{aligned} p(x)+r(x) &= (3\mathbf{x^2}+6x-1)+(-3\mathbf{x^2}+x+5)\\ &= (3-3)\mathbf{x^2}+(6+1)x+(-1+5)\\ &= \qquad 7x \quad + \quad 4\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \deg(p+r) = 1 < \deg p, \deg r\,,$$

da die höchsten Potenzen sich gegenseitig aufheben. Die allgemeine Regel lautet also:

$$\boxed{\deg(p+q) \le \max(\deg p,\ \deg q)} \qquad \text{(max = der größere von beiden.)}$$

$$\begin{aligned} p(x)\cdot q(x) &= (\mathbf{x^3}+2x^2-3x-4)(3\mathbf{x^2}+5x-1)\\ &= 3\mathbf{x^5}+(5+6)x^4+\dots \quad \textit{(kleinere Potenzen)}\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \deg(p\cdot q) = 5 = \deg p+\deg q\,.$$

Dies gilt allgemein, weil sich nichts gegenseitig aufheben kann:

$$\boxed{\deg(p\cdot q) = \deg p+\deg q}\,.$$

→ Darin spiegelt sich das Potenzgesetz 8.4.1 mit gleichen Basen wieder.

2. *Steigungsverhalten.*

a) Eine Gerade $g(x)=a_1x+a_0$ steigt streng monoton, falls $a_1>0$ ist.
z.z.: $x<x' \;\Rightarrow\; g(x)<g(x')$

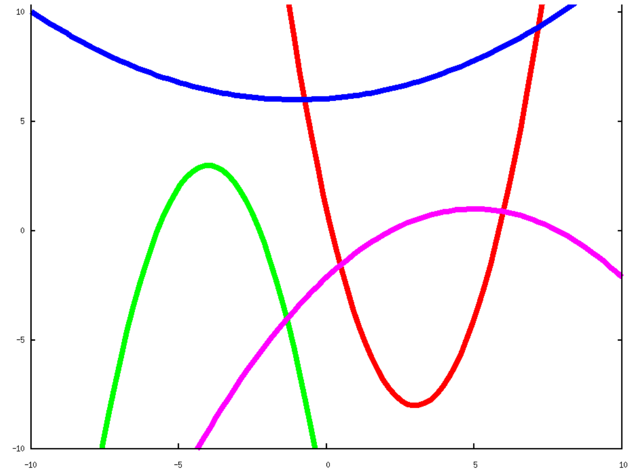
$$g(x)-g(x') = (a_1x+a_0)-(a_1x'+a_0) = \underbrace{a_1}_{>0}\underbrace{(x-x')}_{<0} < 0$$

$$\Rightarrow g(x) < g(x')\,.$$

→ Den Fall $a_1<0$ untersuchen Sie in Aufgabe 8.16.

b) Eine Parabel $p(x)=a_2x^2+a_1x+a_0$ ist nie monoton, da sie bei $x_s=-\dfrac{a_1}{2a_2}$ einen Scheitelpunkt besitzt.

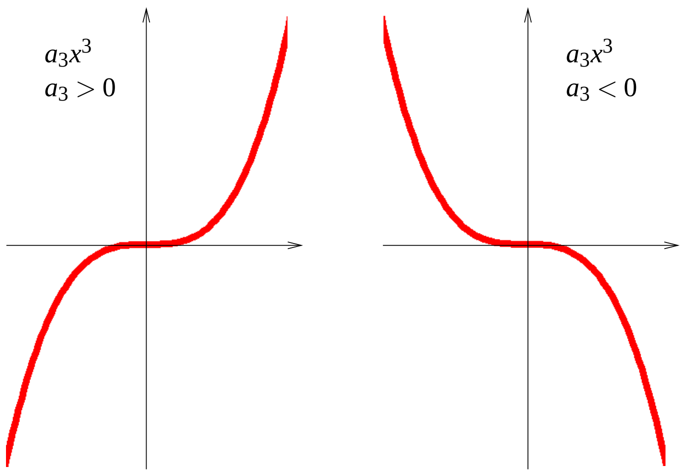
Einige „typische“ Parabeln:



c) Polynome ungeraden Grades streben für große x-Werte (nach ∞ bzw. $-\infty$) immer in verschiedene Richtungen gegen Unendlich. *Beispiel:*

$$p(x) = a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0 = x^3\left(a_3+\frac{a_2}{x}+\frac{a_1}{x^2}+\frac{a_0}{x^3}\right)\,.$$

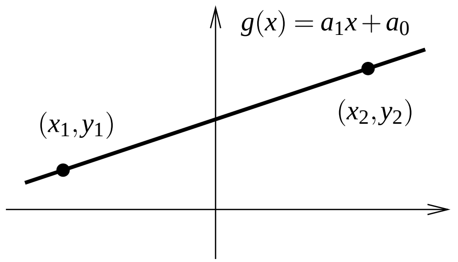
Die Brüche fallen alle gegen Null, p wird bestimmt durch das Verhalten von a_3x^3, vgl. 8.7.1 Fall. Für $a_3>0$ wird dieses Verhalten nicht beeinflusst, für $a_3<0$ wird es umgekehrt. In jedem Fall strebt p zu beiden Seiten in verschiedene Richtungen gegen Unendlich (siehe folgende Abbildung).
→ Polynome geraden Grades untersuchen Sie in Aufgabe 8.16.



3. Ein Polynom n. Grades kann durch *beliebige* $n+1$ *Punkte bestimmt werden*, die nicht „übereinander“ liegen (gleiche x-Werte haben).

   a) Eine Konstante $c(x) = a_0$ $(\deg c = 0)$ wird durch den einen Wert a_0 festgelegt (x-Wert egal).

   b) Eine Gerade $g(x) = a_1x + a_0$ $(\deg g = 1)$ wird durch 2 verschiedene Punkte (x_1, y_1), (x_2, y_2) festgelegt:



$$g(x_1) = a_1x_1 + a_0 = y_1$$
$$g(x_2) = a_1x_2 + a_0 = y_2$$

Das ist ein LGS der folgenden Gestalt:

$$\begin{pmatrix} x_1 & 1 \\ x_2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} .$$

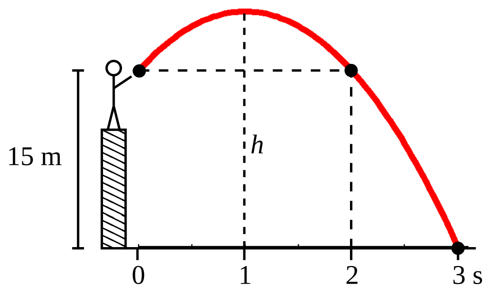
Es ist immer eindeutig lösbar, wenn die Determinante der Matrix nicht verschwindet (vgl. **??**):

$$\det \begin{pmatrix} x_1 & 1 \\ x_2 & 1 \end{pmatrix} = x_1 - x_2 \overset{!}{\neq} 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 \neq x_2 .$$

Hier steht es explizit: die beiden Punkte dürfen nicht übereinander liegen.

$\longrightarrow$ *Durch a_1 und a_0 ist die Vorschrift für g, sind also alle Punkte der ganzen Geraden, festgelegt.*

c) Eine Parabel $p(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0$ $(\deg p = 2)$ wird durch 3 Punkte festgelegt (Beispiel **??**.**??**):



$$\begin{aligned} f(0) &= 15 \\ f(2) &= 15 \\ f(3) &= 0 \\ \Rightarrow \quad f(x) &= -5x^2 + 10x + 15 . \end{aligned}$$

8.14 Nullstellen von Polynomen

Für eine Funktion f heißt ein x-Werte x_0 mit $f(x_0) = 0$ eine **Nullstelle** (Urbild der Null).
Motivation dafür: oft wollen wir die Urbilder x_0 zu bekannten Bildern y_0 bestimmen: $f(x_0) = y_0$. Ein solcher Wert x_0 ist eine Nullstelle der Funktion $g(x) = f(x) - y_0$. Es reicht deshalb in der Theorie aus, Nullstellen zu betrachten:

$$f(x_0) = y_0 \quad \Leftrightarrow \quad g(x_0) = 0 .$$

1. Eine Funktion p zu konstruieren, die eine Menge vorgeschriebener Nullstellen $\{x_1, \ldots, x_n\}$ hat, ist einfach. Wir erhalten ein Polynom:

   $$p(x) = a(x - x_1) \cdot \ldots \cdot (x - x_n) .$$

   Der konstante Faktor $a \in \mathbb{R}$ ist frei wählbar. Die Faktoren $(x - x_i)$ heißen **Linearfaktoren**. Es gilt offensichtlich:

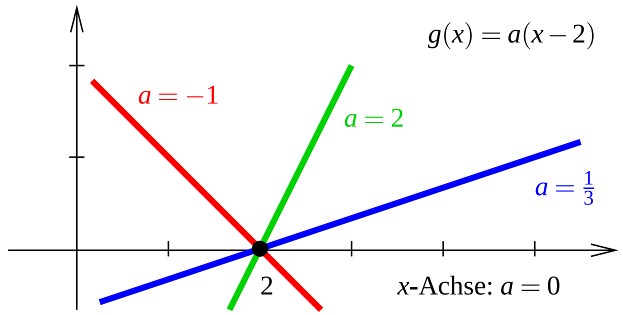
   $$\boxed{\deg p = \text{Anzahl Linearfaktoren.}}$$

   Achtung: nicht *Anzahl Nullstellen*, auch wenn denn das auf den ersten Block dasselbe scheint! Der Grund ist:

2. Linearfaktoren haben eine **Vielfachheit**, d.h. Häufigkeit ihres Auftretens. Gibt es k gleiche Linearfaktoren $(x - x_i)$, so heißt x_i eine *algebraisch k-fache* Nullstelle. Sie entspricht jedoch nur *einem geometrischen* Schnitt mit der x-Achse.

3. *Beispiele:*

a) Eine Gerade $g(x) = a_1 x + a_0$ mit der Nullstelle 2 hat eine Darstellung als $g(x) = a(x-2) = ax - 2a$, d.h. $a_1 = a$ und $a_0 = -2a$. Der freie Parameter a legt dann die genaue Gerade aus allen noch möglichen fest:

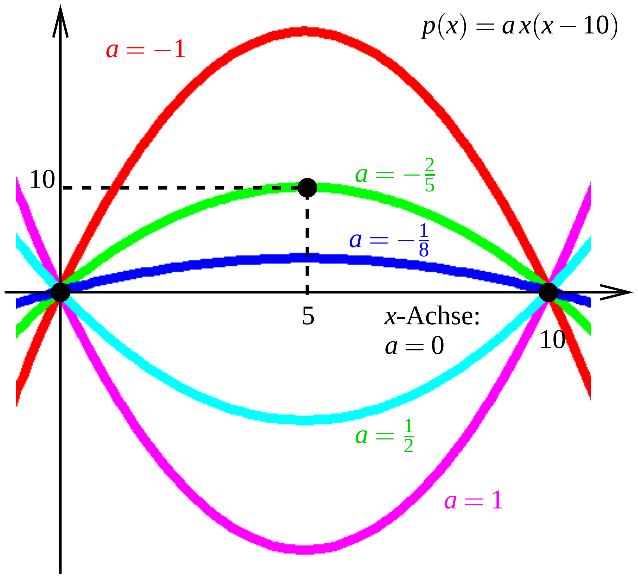


b) Eine Parabel $p(x) = a_2 x + a_1 x + a_0$ mit den Nullstellen 0 und 10 (Brückenbogen!) hat die Vorschrift

$$p(x) \;=\; a(x-0)(x-10) \;=\; ax^2 - 10ax\,,$$

d.h. $a_2 = a,\ a_1 = -10a,\ a_0 = 0.$
Ein zusätzlicher Punkt, z.B. $(5,10)$, legt dann a fest:

$$p(5) \stackrel{!}{=} 10 \;\Rightarrow\; a(5-0)(5-10) = 10 \;\Leftrightarrow\; a = -\frac{10}{25} = -\frac{2}{5}\,.$$



4. Umgekehrt: ein Polynom p vom Grad $n \geq 1$ hat *höchstens* n verschiedene Nullstellen.

   a) Eine Gerade $g(x) = ax + b$ hat die eindeutige Nullstelle $\boxed{x_0 = -\frac{b}{a}}$.

   b) Eine Parabel $f(x) = x^2 + px + q$ hat keine, eine oder zwei Nullstellen, gegeben durch die *pq*-Formel:

   $$\boxed{x_{1,2} \;=\; -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}}\,.$$

   Achtung: der Koeffizient von x^2 muss 1 sein! $\longrightarrow$ *Warum dürfen wir das immer annehmen?*

   c) Polynome 3. und 4. Grades haben komplizierte Nullstellenformeln, Polynome ab 5. Grades keine allgemeinen Formeln[22] mehr.

8.15 Polynomdivision

Ein Polynom „entsteht“ im Prinzip durch Multiplikation von Linearfaktoren, die die Nullstellen angeben:

$$p(x) \;=\; a(x-x_1)\cdot \ldots \cdot (x-x_n)\,.$$

Ist x_i eine dieser Nullstellen, also $p(x_i) = 0$, dann geht die Division $q(x) = \frac{p(x)}{x-x_i}$ ohne Rest auf. Das Ergebnis ist ein Polynom q mit $\deg q = \deg p - 1$.

Beispiel: die Nullstellenmenge sei $\{-1, 2, 4\}$. Ein zugehöriges Polynom 3. Grades lautet:

$$p(x) \;=\; (x+1)(x-2)(x-4) \;=\; x^3 - 5x^2 + 2x + 8\,. \qquad \textit{(Probe!)}$$

Wenn wir die Nullstelle 2 schon kennen, erhalten wir $q(x) = \frac{p(x)}{x-2}$ mit folgender Methode (rechts) analog zur schriftlichen Division von Zahlen (links):

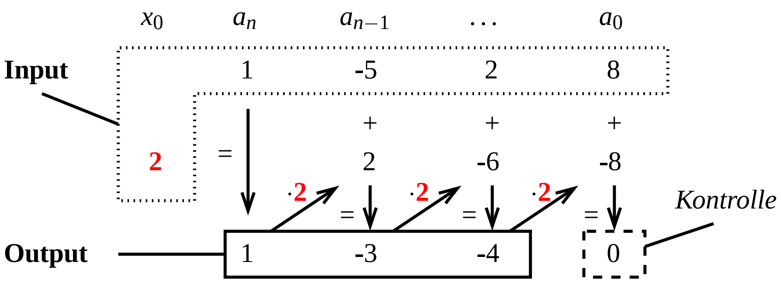
$$\begin{array}{rrrr}
6\;8\;7\;7 & : & 13 & = 5\;2\;9 \\
6\;8 & : & 13 & = 5 \\
-\;6\;5 & - & 13\cdot 5 & \\
3\;7 & : & 13 & = 2 \\
-\;2\;6 & - & 13\cdot 2 & \\
1\;1\;7 & : & 13 & = 9 \\
-\;1\;1\;7 & - & 13\cdot 9 & \\
0\ \checkmark & & &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rl}
(x^3-5x^2+2x+8) & :(x-2) = x^2-3x-4 \\
x^3-5x^2 & :(x-2) = x^2 \\
-x^3+2x^2 & -(x-2)\,x^2 \\
-3x^2+2x & :(x-2) = -3x \\
+3x^2-6x & -(x-2)(-3x) \\
-4x+8 & :(x-2) = -4 \\
+4x-8 & -(x-2)(-4) \\
0\ \checkmark &
\end{array}$$

[22] das bewies 1824 Niels Henrik Abel, 1802–1829, norwegischer Mathematiker

Zu Anfang werden so viele Ziffern (Terme) des Zählers betrachtet, wie der Nenner selbst hat. In jedem Schritt wird diese jeweilige Zahl (dieser jeweilige Term) ohne Rest durch den Nenner geteilt und der Quotient ins Ergebnis geschrieben. Gleichzeitig wird das Produkt aus Ergebnis und Nenner von der Ausgangszahl (-term) abgezogen. Um die neue Ausgangszahl (-term) für den nächsten Schritt zu erhalten, wird die nächste Stelle (der nächste Teilterm) des Zählers dahinter kopiert. Dieser Prozess endet, wenn der ganze Zähler verwendet wurde. (In diesen Beispielen muss dabei 0 herauskommen. Das ist im allgemeinen nicht so.)
Probe: das Restpolynom $q(x) = x^2 - 3x - 4$ muss die restlichen Nullstellen -1 und 4 haben:

$$\begin{aligned} q(-1) &= (-1)^2 - 3\cdot(-1) - 4 = 0 \qquad \text{und} \\ q(4) &= 4^2 - 3\cdot 4 - 4 = 0 \qquad \to \text{OK.} \end{aligned}$$

Die Division lässt sich mit Hilfe des *Horner-Schemas* (8.12) einfach und schnell durchführen, wenn wir durch einen *Linearfaktor* teilen:



x_0 ist dabei die Nullstelle. Zur Kontrolle muss $p(x_0) = 0$ herauskommen. Der Output ist zu verstehen als die Koeffizienten des Ergebnispolynoms q (s.o.).
$\longrightarrow$ *Auf diese Weise können wir das Restpolynom q auf weitere Nullstellen untersuchen und evtl. alle bestimmen. Eine weitere Anwendung dafür kommt im nächsten Abschnitt.*

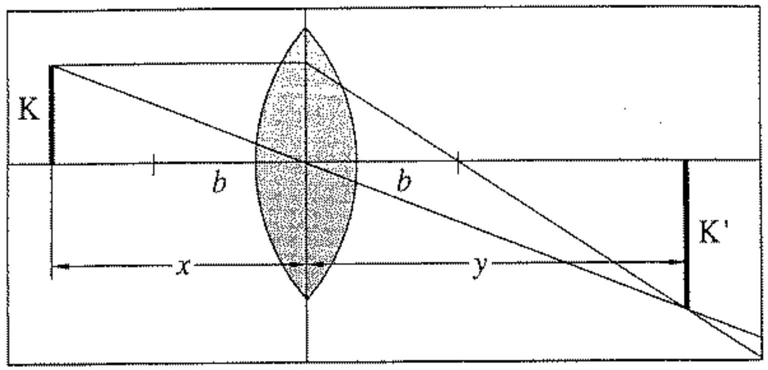
8.16 Aufgabe. (Übungen zu Polynomen.)

8.17 Weitere Problemstellungen

1. Für eine Sammellinse weiß die Physik: die Abstände x eines Gegenstandes und y seines Bildes von der Linse hängen wie folgt zusammen:

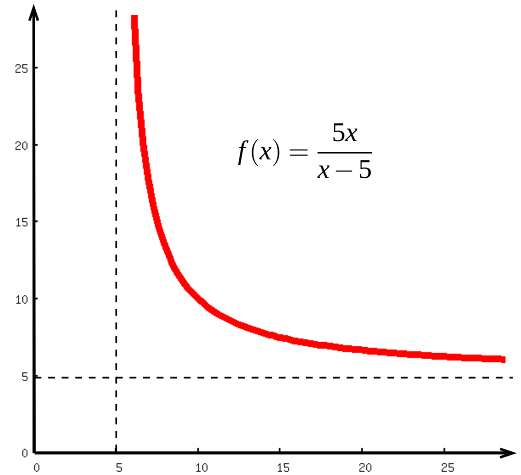
$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{b}\,.$$

Dabei ist b die konstante Brennweite der Linse.



Beispiel: für $b = 5$ cm erhalten wir:

$$\begin{aligned} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} &= \frac{1}{5} \\ \Leftrightarrow \frac{1}{y} &= \frac{1}{5} - \frac{1}{x} = \frac{x-5}{5x} \\ \Leftrightarrow y &= \frac{5x}{x-5}\,. \end{aligned}$$

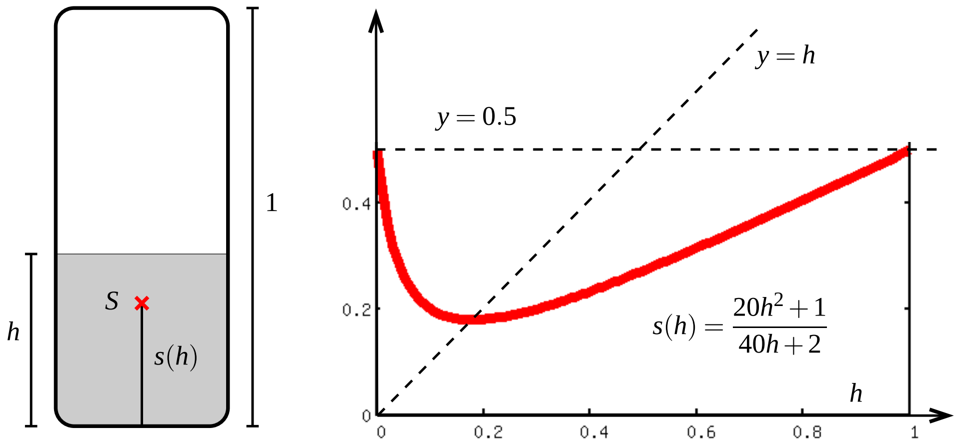


2. Eine Getränkedose der Höhe 1 hat einen Schwerpunkt S, der von der Füllhöhe h des Getränks abhängt. Der Punkt S habe eine Höhe von $s(h)$ über dem Dosenboden.

   Beispiel: die Dose wiegt 25 g und hat einen Inhalt von 0.5 ℓ. Dann gilt (ohne Herleitung):

$$s(h) = \frac{20h^2 + 1}{40h + 2}\,.$$

$\longrightarrow$ *Interessanterweise hat die Schwerpunkthöhe ein Minimum, und zwar genau wenn sie auf der Füllhöhe liegt!*



8.18 Gebrochen rationale Funktionen

1. Seien p, q zwei Polynome. Die Funktion

$$f : D_f \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$$

heißt **gebrochen rationale Funktion**.

2. Die Nullstellen des Nenners q sind **Definitionslücken** (nicht definierte einzelne Stellen) der Funktion $r = \frac{p}{q}$:

$$q(x_0) = 0 \;\Rightarrow\; r(x_0) = \frac{p(x_0)}{q(x_0)} \text{ ist nicht definiert!}$$

Sei $\mathbf{N(q)} := \{x \in \mathbb{R} \mid q(x) = 0\}$ die Nullstellenmenge von q. Dann gilt für die maximale Definitionsmenge von r:

$$\boxed{D_r = \mathbb{R} \setminus N(q)}\,.$$

3. Die Nullstellen des Zählers p sind Nullstellen von r, wenn sie nicht Definitionslücken sind:

$$p(x_0) = 0 \;\Rightarrow\; r(x_0) = \frac{p(x_0)}{q(x_0)} = 0\,, \quad \text{falls } q(x_0) \neq 0\,.$$

Für die Nullstellen von r gilt daher:

$$\boxed{N(r) = N(p) \setminus N(q)}\,.$$

$\longrightarrow$ *Gebrochen rationale Funktionen sind die allgemeinsten Funktionen, wenn man Variablen nur addiert, multipliziert und dividiert.*

8.19 Eigenschaften gebrochen rationaler Funktionen

1. Gebrochen rationale Funktionen sind *abgeschlossen* unter Addition, Multiplikation und Division:

$$\boxed{r, s \text{ gebrochen rational} \;\Rightarrow\; r+s,\ r\cdot s \text{ und } r/s \text{ gebrochen rational.}}$$

Beweis. Seien $r(x) = \frac{p_1(x)}{q_1(x)}$ und $s(x) = \frac{p_2(x)}{q_2(x)}$ mit p_i, q_i Polynomen.

$$\begin{aligned} r(x) + s(x) &= \frac{p_1(x)}{q_1(x)} + \frac{p_2(x)}{q_2(x)} \\ &= \frac{p_1(x)\,q_2(x) + p_2(x)\,q_1(x)}{q_1(x)\,q_2(x)} \quad \begin{matrix} \} \text{ Polynom} \\ \} \text{ Polynom} \end{matrix}\,, \end{aligned}$$

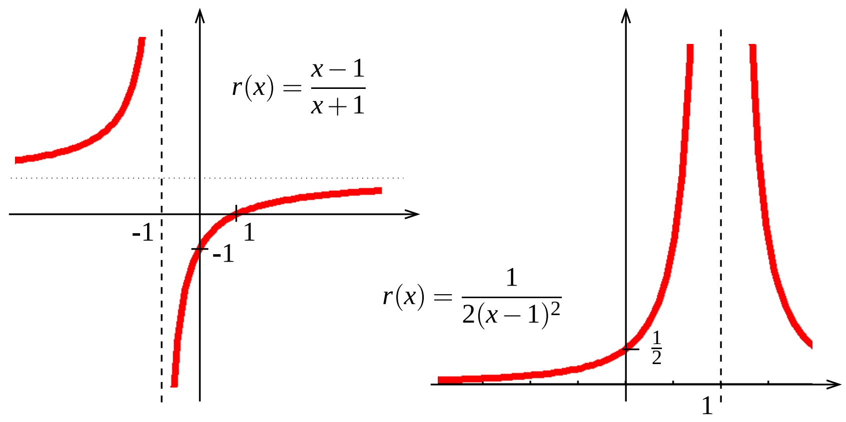
d.h. $r(x) + s(x)$ ist wieder ein Bruch zweier Polynome. Ebenso

$$\begin{aligned} r(x)\cdot s(x) &= \frac{p_1(x)}{q_1(x)} \cdot \frac{p_2(x)}{q_2(x)} = \frac{p_1(x)\,p_2(x)}{q_1(x)\,q_2(x)} \quad \begin{matrix} \} \text{ Polynom} \\ \} \text{ Polynom} \end{matrix}\,, \\ r(x) : s(x) &= \frac{p_1(x)}{q_1(x)} : \frac{p_2(x)}{q_2(x)} = \frac{p_1(x)\,q_2(x)}{q_1(x)\,p_2(x)}\,. \end{aligned}$$

$\square$

2. Es gibt zwei Arten von *Definitionslücken*.

<u>1. Fall:</u> $q(x_0) = 0$ und $p(x_0) \neq 0$. Dann heißt x_0 ein **Pol** von r.
Anschaulich: Der Graph von r strebt gegen die senkrechte Gerade $x = x_0$. Dabei kann r das Vorzeichen wechseln oder nicht:



Ein Vorzeichenwechsel von r ist zu erkennen an einem Vorzeichenwechsel von q bei seiner Nullstelle x_0.

Beispiel: $r(x) = \dfrac{x-1}{x+1} =: \dfrac{p(x)}{q(x)}$ (Bild links).

Es ist $q(-1) = 0$ und $p(-1) = -2 \;\Rightarrow\; x_0 = -1$ ist ein Pol von r. Das Vorzeichen des Nenners um x_0 wird getestet durch Einsetzen zweier eng benachbarter Stellen $x_0 - \varepsilon$ und $x_0 + \varepsilon$ mit einer kleinen Abweichung $\varepsilon > 0$, z.B. $\varepsilon = 0.1$:

$$q(-1-0.1) \;=\; -0.1 \;<\; 0 \qquad \text{und} \qquad q(-1+0.1) \;=\; 0.1 \;>\; 0\,.$$

Das jeweilige Vorzeichen von r ergibt sich zusammen mit dem Vorzeichen des Zählers:

$$x < x_0: \quad \left.\begin{array}{l} \dfrac{p(x_0)}{q(x)} \begin{array}{l} \} < 0 \\ \} < 0 \end{array} \end{array}\right\} > 0$$

$$x > x_0: \quad \left.\begin{array}{l} \dfrac{p(x_0)}{q(x)} \begin{array}{l} \} < 0 \\ \} > 0 \end{array} \end{array}\right\} < 0\,.$$

r hat also einen Vorzeichenwechsel von positiv zu negativ.

Wenn r keinen Vorzeichenwechsel durchläuft, ist das evtl. ohne die obige Untersuchung zu sehen. Beispiel Bild rechts: die Funktion $r(x) = \frac{1}{2(x-1)^2}$ nimmt offensichtlich in Zähler und Nenner immer nur positive Werte an.

<u>2. Fall:</u> $q(x_0) = p(x_0) = 0\,.$

Hier muss weiter untersucht werden. Beide Polynome enthalten den Linearfaktor $x - x_0$, die Divisionen

$$\bar{p}(x) \;:=\; \frac{p(x)}{x-x_0} \qquad\qquad \bar{q}(x) \;:=\; \frac{q(x)}{x-x_0}$$

gehen deshalb beide ohne Rest auf. Wir erhalten daraus eine neue Darstellung

$$r(x) \;=\; \frac{p(x)}{q(x)} \;=\; \frac{(x-x_0)\,\bar{p}(x)}{(x-x_0)\,\bar{q}(x)} \;=\; \frac{\bar{p}(x)}{\bar{q}(x)}\,.$$

<u>1. Unterfall:</u> $\bar{q}(x_0) \neq 0\,.$

Dann kann die Lücke durch den Punkt $(x_0, \frac{\bar{p}(x_0)}{\bar{q}(x_0)})$ *behoben* werden. x_0 heißt dann eine **hebbare** Definitionslücke.

Anschaulich: dem Graphen fehlt nur ein Punkt, der zusätzlich eingefügt werden kann.

<u>2. Unterfall:</u> $\bar{q}(x_0) = 0\,.$

Dann wird die Untersuchung von vorne begonnen mit den Polynomen $\bar{p}$ und $\bar{q}$.

Beispiel:

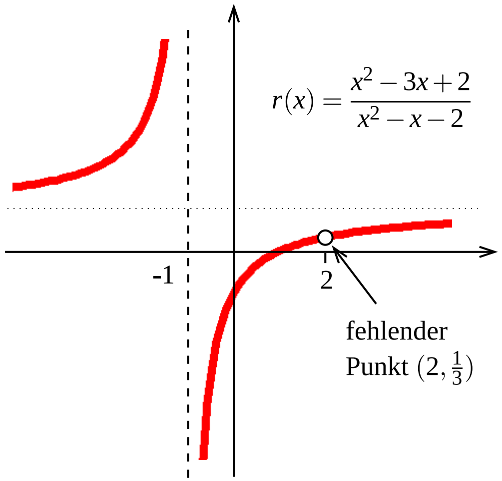
$$r(x) = \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{x^2-3x+2}{x^2-x-2}$$

Es ist $p(2) = q(2) = 0$
$\Rightarrow$ berechne

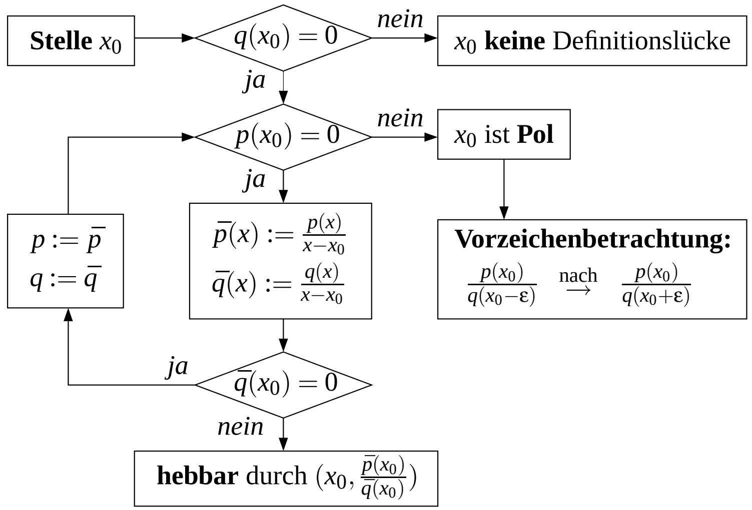
$$\bar{p}(x) \;=\; \frac{p(x)}{x-2} \;=\; x-1$$

$$\bar{q}(x) \;=\; \frac{q(x)}{x-2} \;=\; x+1\,.$$

Jetzt ist $\bar{q}(2) = 3 \neq 0$,
der Punkt $(2, \frac{\bar{p}(2)}{\bar{q}(2)} = \frac{1}{3})$
schließt die Lücke.



Die Untersuchung der Definitionslücken als Ablaufdiagramm:



3. *Verhalten für große x-Werte* $(\pm\infty)$.

In jedem Fall strebt eine gebrochen rationale Funktion gegen eine so genannte **Asymptote** (Näherungskurve). Im einzelnen:

<u>1. Fall:</u> $\deg p < \deg q$.

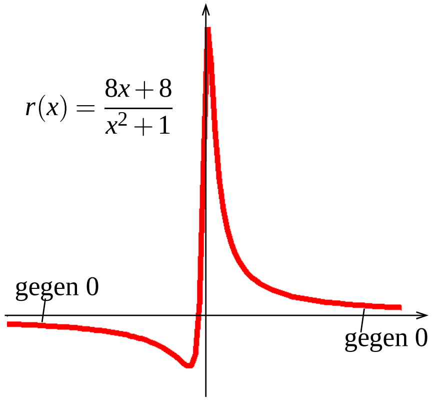
Dann strebt r gegen 0. Die Asymptote ist die x-Achse.

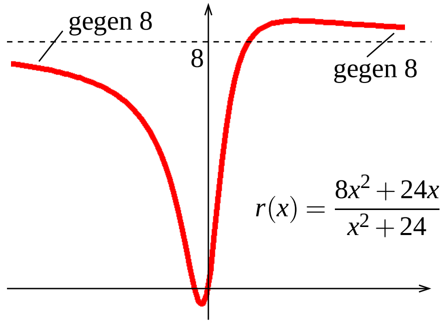
Beispiel. (Bild links) Wir kürzen den Bruch mit $x^{\deg p}$:

$$r(x) = \frac{8x+8}{x^2+1} = \frac{\overbrace{8+\frac{8}{x}}^{\approx 8}}{\underbrace{x+\frac{1}{x}}_{\text{groß}}} \approx 0\,.$$

Alternativ können wir den Bruch auch mit $x^{\deg q}$ kürzen:

$$r(x) = \frac{8x+8}{x^2+1} = \frac{\overbrace{\frac{8}{x}+\frac{8}{x^2}}^{\approx 0}}{\underbrace{1+\frac{1}{x^2}}_{\approx 1}} \approx 0\,.$$





<u>2. Fall:</u> $\deg p = \deg q$.

Dann strebt r gegen die Konstante $c :=$ *Bruch der höchsten Polynomkoeffizienten*. Die Asymptote ist die waagerechte Gerade $y = c$.

Beispiel. (Bild rechts) Wir kürzen den Bruch mit $x^{\deg p}$:

$$r(x) = \frac{8x^2+24x}{x^2+24} = \frac{\overbrace{8+\frac{24}{x}}^{\approx 8}}{\underbrace{1+\frac{24}{x^2}}_{\approx 1}} \approx 8\,.$$

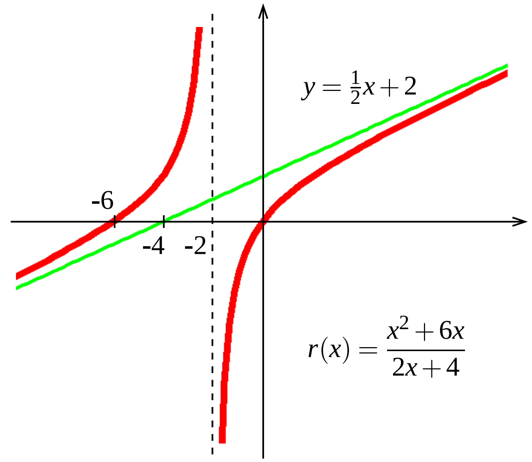
<u>3. Fall:</u> $\deg p > \deg q$.

Dann verhält sich r wie ein Polynom vom Grad $\deg p - \deg q$. Dieses ist die Asymptote.

Beispiel:

$$r(x) = \frac{x^2+6x}{2x+4} \overset{8.15}{=} \underbrace{\frac{1}{2}x+2}_{\text{Asymptote}} - \underbrace{\frac{8}{2x+4}}_{\approx 0} \approx \frac{1}{2}x+2\,.$$

Hier wird Polynomdivision mit Rest angewendet. Der Restbruch fällt immer in den 1. Fall und strebt deshalb gegen 0. Dadurch nähert sich r immer mehr dem Polynom vor dem Restbruch.



8.20 Aufgabe. (Übungen zu gebrochen rationalen Funktionen.)

Exponential- und Logarithmusfunktionen

8.21 Weitere Problemstellungen

1. Eine Seerosen-Art verdoppelt jede Woche die von ihr bedeckte Wasserfläche. Sie hat einen See nach 10 Wochen zu 20% bedeckt. Wann wird er ganz bedeckt sein?
2. Sie legen 1000 € zu 5% Zinsen p.a. an. Wieviel Geld haben Sie nach 2 und 5 Jahren, wenn die Ausschüttungen wieder angelegt werden? Wie lange müssen Sie warten, bis sich Ihr Geld verdoppelt hat?
3. Welche der Zahlen 2^{200}, 3^{100} ist größer? Wieviele Dezimalstellen hat ihr Produkt?
4. Radioaktives Material zerfällt von selbst in stabile Elemente. Angegeben werden sog. *Halbwertszeiten*, nach denen jeweils die Hälfte einer festen Menge zerfallen ist. Wie lassen sich damit archäologische Funde datieren?
5. Welche Kurve beschreibt eine Hängebrücke / Stromleitung / Seilbahn?

8.22 Die Exponentialfunktion

Sei $a \in \mathbb{R}^+$. Die Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+ \,, \quad f(x) = a^x$$

heißt **Exponentialfunktion zur Basis a**.

⟶ Diese Funktionenklasse ist eng verwandt mit den Potenzfunktionen, nur dass hier die Variable im Exponenten steht und die Basis konstant bleibt. Das bewirkt entscheidende Unterschiede zwischen ihnen.

8.23 Eigenschaften von Exponentialfunktionen

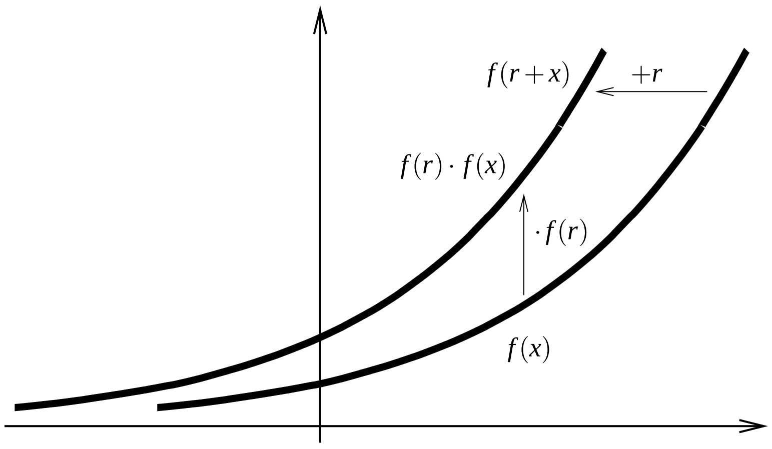
1. Es gelten die Rechengesetze 8.4 der Potenzfunktionen für alle $a, b \in \mathbb{R}^+$:

(i)	$a^0 = 1$		
(ii)	$a^{-x} = \dfrac{1}{a^x}$	für alle $x \in \mathbb{R}$	
(iii)	$a^x \cdot a^y = a^{x+y}$	für alle $x, y \in \mathbb{R}$	*Funktionalgleichung*
(iv)	$a^x \cdot b^x = (ab)^x$	für alle $x \in \mathbb{R}$	
(v)	$(a^x)^y = a^{xy} = (a^y)^x$	für alle $x, y \in \mathbb{R}$.	

Die Funktionalgleichung (iii) besagt:

$$\boxed{f(x+y) \;=\; f(x) \cdot f(y)} \,,$$

d.h. eine Verschiebung des Graphen von f um y nach links ist dasselbe wie eine Streckung um den Faktor $f(y)$ nach oben.



Gesetze (iv) und (v) besagen: das Produkt zweier Exponentialfunktionen und die y. Potenz einer Exponentialfunktion ist wieder eine Exponentialfunktion.

2. Für $a > 1$ ist a^x streng monoton steigend und surjektiv auf $\mathbb{R}^+$.

Beweis.

Wir wissen aus 8.7.2 bzw. 8.7.5, dass die Potenzfunktion x^n für $n > 0$ auf $\mathbb{R}^+$ streng monoton steigt[23]. Daraus folgt insbesondere: $1 < a \;\Rightarrow\; 1 = 1^n < a^n$. Wir ersetzen syntaktisch n durch x und erhalten:

$$a > 1 \,,\; x > 0 \;\Rightarrow\; a^x \;>\; 1 \,.$$

Daraus folgt für beliebige $x' > x$ die *strenge Monotonie*:

$$a^{x'} \;=\; a^{x'-x+x} \;=\; a^{\overbrace{x'-x}^{>0}} \cdot a^x \;>\; 1 \cdot a^x \,.$$

Um die *Surjektivität* zu zeigen, benötigen wir die sog. **Bernoullische Ungleichung**[24]:

$$(1+x)^n \;\geq\; 1 + nx \qquad \text{für alle } x \in [-1, \infty[\,,\; n \in \mathbb{N}_0 \,.$$

⟶ Der Beweis dieser Ungleichung ist eine leichte Übung in vollständiger Induktion!

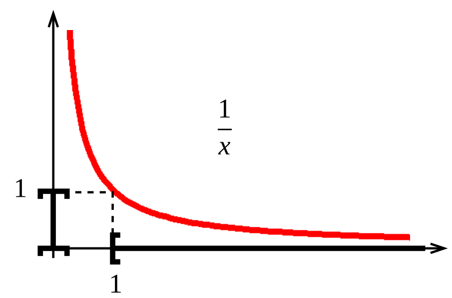
Wegen $a > 1$ ist $a - 1 > 0 \geq -1$, wir können $x := a$ darin einsetzen und erhalten: $a^n \geq 1 + n(a-1)$. Dann ersetzen wir wieder syntaktisch n durch x:

$$a^x \;\geq\; 1 + (a-1)\,x \,.$$

Also steigt a^x für große positive x mindestens so schnell wie die Gerade auf der rechten Seite. Diese steigt nach 8.13.2 wegen $a - 1 > 0$ streng monoton und ist unbeschränkt. Die Wertemenge von a^x ist deshalb ausgehend von $a^0 = 1$ ebenfalls unbeschränkt: $a^{\mathbb{R}^+} = \,]1, \infty[$.

Für $x < 0$ verwenden wir die Rechenregel (ii) $a^{-x} = \dfrac{1}{a^x}$:

$$a^{\mathbb{R}^-} \;=\; \frac{1}{a^{\mathbb{R}^+}} \;=\; \frac{1}{]1, \infty[} \;=\;]0, 1[\,.$$



[23] Wir hatten diesen Zusammenhang streng genommen nur für rationale n gezeigt. Er gilt (ohne Beweis) auch für reelle.

[24] Jakob Bernoulli, 1655–1705, schweizer Mathematiker. Die Ungleichung gilt (ohne Beweis) auch für reelle Exponenten $n \geq 0$.

Alle Teile zusammen setzen:

$$\begin{aligned} a^{\mathbb{R}} &= a^{\mathbb{R}^- \cup \{0\} \cup \mathbb{R}^+} = a^{\mathbb{R}^-} \cup \{a^0\} \cup a^{\mathbb{R}^+} \\ &= \,]0,1[\, \cup \{1\} \cup \,]1,\infty[\, = \mathbb{R}^+ . \end{aligned} \qquad \square$$

3. Für $0 < a < 1$ ist a^x streng monoton fallend und ebenfalls surjektiv auf $\mathbb{R}^+$.

   Dieser Fall lässt sich durch die Setzung $b := \frac{1}{a} > 1$ auf den obigen zurück führen. Die Funktion b^x ist streng monoton steigend und surjektiv auf $\mathbb{R}^+$. Für die Funktion $a^x = (\frac{1}{b})^x = \frac{1}{b^x}$ gilt dann:

$$x < x' \;\Rightarrow\; a^x = \frac{1}{b^x} > \frac{1}{b^{x'}} = a^{x'}$$

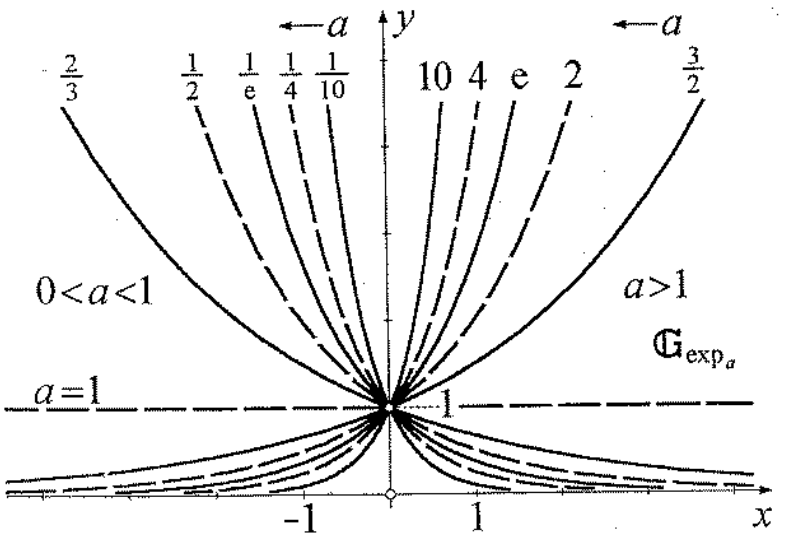
$$a^{\mathbb{R}} = \frac{1}{b^{\mathbb{R}}} = \frac{1}{\mathbb{R}^+} = \mathbb{R}^+ .$$

4. Für $a = 1$ ist a^x nach 8.4.3 konstant: $a^x = 1^x = 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

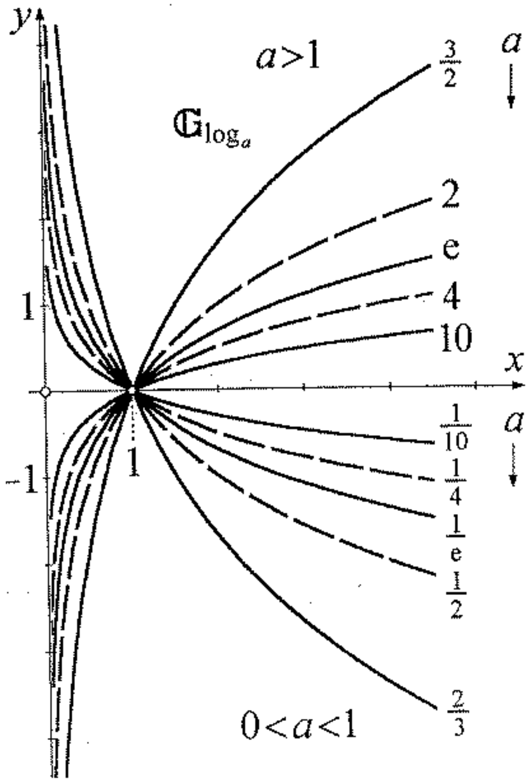
5. *Zusammenfassung der Ergebnisse.*

$a \in \mathbb{R}^+$	$D_f \to f(D_f)$	monoton	bijektiv
$a > 1$	$\mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$	$\nearrow$	ja
$a = 1$	$\mathbb{R} \to \{1\}$	—	nein
$a < 1$	$\mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$	$\searrow$	ja

Die folgende Abbildung zeigt einige Exponentialfunktionen für $0.1 \leq a \leq 10$.



8.24 Die Logarithmusfunktion



Die Exponentialfunktion ist nach 8.23 für $a \neq 1$ bijektiv, daher existiert die Umkehrfunktion

$$\mathbf{log_a} : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R} .$$

Sie heißt der **Logarithmus zur Basis a**.

$\log_a$ ist wie a^x streng monoton steigend für $a > 1$ bzw. fallend für $0 < a < 1$. $\log_a$ ist surjektiv, wird also beliebig groß für $x \approx 0$ und große x.

$\longrightarrow$ $\log_a$ *ist nicht vom Typ der Exponentialfunktion, schon deswegen, weil er nicht für negative Werte definiert ist, aber negative Werte herauskommen können. Das ist ein wesentlicher Unterschied zur Potenzfunktion, deren Umkehrung wieder eine solche ist!*

Für $\log_a$ gelten die folgenden Gesetze für alle $a, b, x, y \in \mathbb{R}^+$:

(i)	$\log_a a^x = x = a^{\log_a x}$	*Umkehrfunktion*
(ii)	$\log_a 1 = 0$	
(iii)	$\log_a(x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$	*Funktionalgleichung*
(iv)	$\log_a b^x = x \cdot \log_a b$	
(v)	$\log_a x = \log_b x \cdot \log_a b$.	

Beweis.

(ii) $\quad \log_a 1 \overset{8.23.1\,(i)}{=} \log_a a^0 \overset{(i)}{=} 0$

(iii) $\quad \log_a(x \cdot y) \overset{(i)}{=} \log_a(a^{\log_a x} \cdot a^{\log_a y}) \overset{8.23.1\,(iii)}{=} \log_a(a^{\log_a x + \log_a y}) \overset{(i)}{=} \log_a x + \log_a y$

(iv) $\quad \log_a b^x \overset{(i)}{=} \log_a(a^{\log_a b})^x \overset{8.23.1\,(v)}{=} \log_a a^{x \cdot \log_a b} \overset{(i)}{=} x \cdot \log_a b$

(v) $\quad \log_a x \overset{(i)}{=} \log_a b^{\log_b x} \overset{(iv)}{=} \log_b x \cdot \log_a b . \qquad \square$

Die Funktionalgleichung (iii) besagt:

$$\boxed{f(x \cdot y) \;=\; f(x) + f(y)}\;.$$

Wir können eine Multiplikation ersetzen durch eine Addition und drei Funktionswerte:

$$\text{(iii)} \;\Leftrightarrow\; x \cdot y \;=\; a^{\log_a x + \log_a y}\;.$$

Gesetz (iv) besagt, dass wir Potenz und Exponential ersetzen können durch eine Multiplikation und zwei Funktionswerte:

$$\text{(iv)} \;\Leftrightarrow\; b^x \;=\; a^{x \cdot \log_a b}\;.$$

Gesetz (v) besagt, dass es im Grunde nur eine einzige Logarithmusfunktion gibt. Alle anderen sind konstante Vielfache davon:

$$\text{(v)} \;\Leftrightarrow\; \boxed{\log_b x \;=\; \frac{\log_a x}{\log_a b}}\;.$$

Die verwendete Basis $a \neq 1$ ist dabei egal. Beispiel:

$$\log_2 1000 \;=\; \frac{\log_{10} 1000}{\log_{10} 2} \;\approx\; \frac{3}{0.301} \;=\; 9.966\;.$$

$\longrightarrow$ *Das ist der Grund, warum Ihr Taschenrechner nur zwei Logarithmusfunktionen anbietet:* $\log_{10}$ *und* $\ln$. *Eine würde ausreichen, man gibt aber beide aus Gründen der Bequemlichkeit. 10 ist die Basis unseres (exponentiellen) Zahlensystems und die Rolle von* $\ln$ *wird in 8.26 klar werden.*

Logarithmusfunktionen $\log_a x$ haben folgende Eigenschaften:

$a \in \mathbb{R}^+$	$D_f \to f(D_f)$	monoton
$a > 1$	$\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$	$\nearrow$
$a < 1$	$\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$	$\searrow$
	immer bijektiv	

Achtung: für $a = 1$ existiert kein Logarithmus!

$\longrightarrow$ *Historisch war die Entdeckung der Logarithmen ein Durchbruch in der Rechentechnik. 1614 veröffentlichte Napier*[25] *die erste Logarithmentafel, also eine Tabelle mit Funktionswerten. Mit deren Hilfe konnte man leicht mit obigen Formeln beliebige Produkte und Potenzen/Exponentiale berechnen. Das beförderte wesentlich das Ingenieurswesen und die Modellbildung in den aufkommenden Naturwissenschaften. Nicht zuletzt auf dieser Geistesleistung fußte der Aufbruch Europas in die Aufklärung und das industrielle Zeitalter.*

[25] John Napier, 1550–1617, schottischer Mathematiker

8.25 Auflösung der Problemstellungen 8.21

1. *(Seerosen.)*
   Sei $f : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}^+$ die bedeckte Wasserfläche in Anteil Seeoberfläche über der Zeit in Wochen. Verdopplung pro Zeiteinheit bedeutet:
   $$f(t+1) \;=\; 2\,f(t)\;.$$
   Vergleich mit der Funktionalgleichung $a^{t+1} = a \cdot a^t$ liefert $a = 2$ und so den Ansatz $f(t) = c \cdot 2^t$ mit einer noch unbekannten Konstanten c. Die Bedingung $f(10) = \frac{1}{5}$ liefert:
   $$\frac{1}{5} \;=\; f(10) \;=\; c \cdot 2^{10} \;\Rightarrow\; c \;=\; \frac{1}{5 \cdot 2^{10}}\;.$$
   Nach welcher Zeit t_0 ist der See ganz bedeckt, d.h. $f(t_0) = 1$?
   $$\begin{aligned} 1 \;&=\; f(t_0) \;=\; \frac{1}{5 \cdot 2^{10}} \cdot 2^{t_0} \\ \Rightarrow\; 2^{t_0} \;&=\; 5 \cdot 2^{10} \\ \Leftrightarrow\; t_0 \;&\overset{8.24\,(i)}{=}\; \log_2(5 \cdot 2^{10}) \;\overset{8.24\,(iii)}{=}\; \log_2 5 + \log_2 2^{10} \\ &\overset{8.24\,(v)}{=}\; \frac{\log_{10} 5}{\log_{10} 2} + 10 \;\approx\; 12.32\;. \end{aligned}$$
   Ergebnis: der See ist nach ca. $12\frac{1}{3}$ Wochen ganz bedeckt.

2. *(Zinseszinsen.)*
   5% Zinsen p.a. entsprechen einer Zunahme des Kapitals um $\frac{5}{100}$: nach einem Jahr haben wir
   $$1000\,€ + \frac{5}{100} \cdot 1000\,€ \;=\; 1.05 \cdot 1000\,€\;.$$
   Dieses Kapital wird im Folgejahr nochmals so verzinst, wir haben dann
   $$1.05 \cdot (1.05 \cdot 1000\,€) \;=\; 1.05^2 \cdot 1000\,€ \;=\; 1102.50\,€\;.$$
   Allgemein: nach n Jahren haben Sie $f(n) = 1.05^n \cdot 1000\,€$ und $f(5) = 1276.28\,€$.
   Nach welcher Anzahl n_0 von Jahren hat sich das Kapital verdoppelt?
   $$\begin{aligned} f(n_0) \;&\overset{!}{=}\; 2000\,€ \\ \Rightarrow\; 1.05^{n_0} \cdot 1000\,€ \;&=\; 2000\,€ \\ \Leftrightarrow\; 1.05^{n_0} \;&=\; 2 \\ \Leftrightarrow\; n_0 \;&=\; \log_{1.05} 2 \;\overset{8.24\,(v)}{=}\; \frac{\log_{10} 2}{\log_{10} 1.05} \;\approx\; 14.2 \text{ Jahre.} \end{aligned}$$

3. *(Zahlenvergleich.)*

Die Funktion 10^x ist nach 8.23 streng monoton steigend:

$$x < x' \;\Rightarrow\; 10^x < 10^{x'} .$$

Das gilt auch, wenn wir zwei Logarithmenwerte $x := \log_{10} y,\ x' := \log_{10} y'$ einsetzen:

$$\log_{10} y < \log_{10} y' \;\Rightarrow\; y = 10^{\log_{10} y} < 10^{\log_{10} y'} = y' .$$

Wir können also statt zweier Zahlen auch deren log-Werte vergleichen:

$$\log_{10} 2^{200} \overset{8.24\,(iv)}{=} 200 \cdot \log_{10} 2 \approx 200 \cdot 0.301 = 60.2$$

$$\log_{10} 3^{100} \overset{8.24\,(iv)}{=} 100 \cdot \log_{10} 3 \approx 100 \cdot 0.477 = 47.7$$

Wir entnehmen daraus die gesuchte Antwort:

$$\log_{10} 2^{200} = 60.2 > 47.7 = \log_{10} 3^{100} \;\Rightarrow\; 2^{200} > 3^{100} .$$

(Anzahl Dezimalstellen.)

Gesucht ist eine Funktion

$$\mathrm{Anz} : \mathbb{N} \to \mathbb{N} ,\quad \mathrm{Anz}(n) := \text{Anzahl Stellen in der Dezimaldarstellung von } n .$$

Anmerkung: der Funktionsname „Anz“ ist nicht standardisiert.

Wir wissen: $\mathrm{Anz}(10n) = \mathrm{Anz}(n) + 1$. Der Vergleich mit der Funktionalgleichung $\log_a(10n) = \log_a 10 + \log_a n$ liefert: $\log_a 10 = 1 \;\Leftrightarrow\; a = 10$ und so $\mathrm{Anz}(n) = \log_{10} n + c$ mit einer noch unbekannten Konstanten $c \in \mathbb{R}$. Wir bestimmen c durch ein beliebiges Beispiel, z.B. $\mathrm{Anz}(1) = 1$:

$$1 = \mathrm{Anz}(1) = \log_{10} 1 + c \overset{8.24\,(ii)}{=} c .$$

Wir beobachten noch, dass diese Definition von Anz nicht immer natürliche Zahlen ergibt, wir müssen runden. Um die Richtung der Rundung zu bestimmen, wählen wir ein beliebiges nicht-ganzzahliges Beispiel: $\mathrm{Anz}(2) = 1$. Es ist $\log_{10} 2 + 1 \approx 1.3$, also müssen wir abrunden.

Als Ergebnis erhalten wir die Funktion

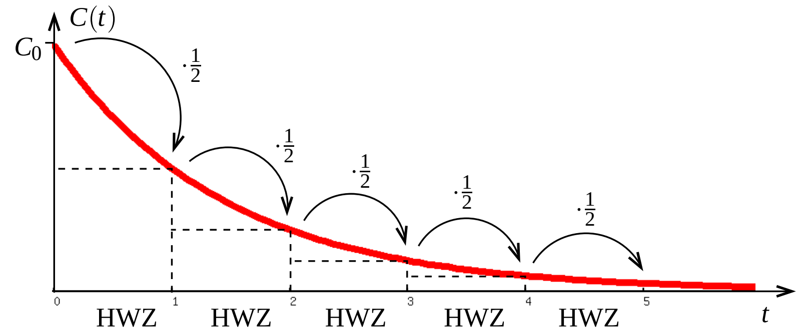
$$\mathrm{Anz}(x) = \lfloor \log_{10} x + 1 \rfloor \qquad \leftarrow \lfloor \cdot \rfloor \text{ Abrundung, siehe 8.36}$$

Einsetzen der bekannten Inputwerte:

$$\begin{aligned} \mathrm{Anz}(2^{200} \cdot 3^{100}) &= \lfloor \log_{10}(2^{200} \cdot 3^{100}) + 1 \rfloor \\ &\overset{8.24\,(iii)}{=} \lfloor \log_{10} 2^{200} + \log_{10} 3^{100} + 1 \rfloor \\ &\overset{\text{oben}}{=} \lfloor 60.2 + 47.7 + 1 \rfloor \\ &= 108 . \end{aligned}$$

4. *(Archäologische Datierung.)*

Die sog. *Isotope* ^{12}C und ^{14}C des Elements Kohlenstoff unterscheiden sich chemisch nicht und werden von Lebewesen im selben Verhältnis $C_0 := {}^{14}C / {}^{12}C$ verstoffwechselt, wie sie in der Atmosphäre vorliegen. Sie unterscheiden sich aber physikalisch dadurch, dass ^{12}C stabil ist, während ^{14}C radioaktiv zerfällt. Mit dem Tod eines Lebewesens endet sein Stoffwechsel und das Verhältnis $C(t)$ in seinem Gewebe verändert sich über die Zeit t durch diesen Zerfall exponentiell:



Die Konstante HWZ ist die sog. **Halbwertszeit**, nach der ein radioaktiver Stoff zur Hälfte zerfallen ist. Für ^{14}C ist HWZ = 5730 Jahre. Die Formel lautet:

$$C(t) = C_0 \cdot \left(\tfrac{1}{2}\right)^{\frac{t}{\mathrm{HWZ}}} ,$$

wobei die Zeit $t = 0$ den Tod markiert. $C_0 = C(0)$ ist der bekannte Vergleichswert für den ^{14}C-Anteil in der damaligen Atmosphäre.

Probe, ob die Formel die physikalische Realität $C(t + \mathrm{HWZ}) = \frac{1}{2} C(t)$ wiedergibt:

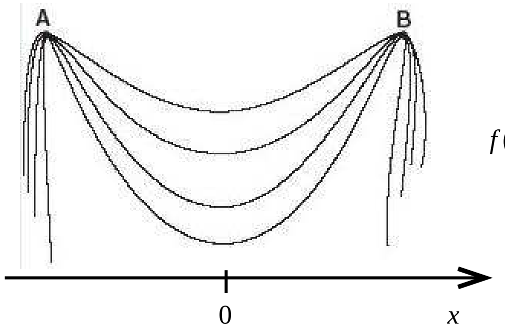
$$C(t + \mathrm{HWZ}) = C_0 \cdot \left(\tfrac{1}{2}\right)^{\frac{t+\mathrm{HWZ}}{\mathrm{HWZ}}} = C_0 \cdot \left(\tfrac{1}{2}\right)^{\frac{t}{\mathrm{HWZ}}+1} = C_0 \cdot \left(\tfrac{1}{2}\right)^{\frac{t}{\mathrm{HWZ}}} \cdot \tfrac{1}{2} = \tfrac{1}{2} C(t) .$$

Angenommen, wir haben bei einem Fundstück $C(t_0) = \frac{1}{10} C_0$ gemessen. Wie alt ist das Fundstück, d.h. welchen Wert hat t_0 ?

$$\begin{aligned} & \tfrac{1}{10} C_0 = C(t_0) = C_0 \cdot \left(\tfrac{1}{2}\right)^{\frac{t_0}{\mathrm{HWZ}}} \\ \Rightarrow\; & \left(\tfrac{1}{2}\right)^{\frac{t_0}{\mathrm{HWZ}}} = \tfrac{1}{10} \\ \Leftrightarrow\; & \frac{t_0}{\mathrm{HWZ}} = \log_{\frac{1}{2}} \tfrac{1}{10} \\ \Leftrightarrow\; & t_0 = \mathrm{HWZ} \cdot \log_{\frac{1}{2}} \tfrac{1}{10} = 5730 \text{ Jahre} \cdot \frac{\log_{10} \frac{1}{10}}{\log_{10} \frac{1}{2}} \approx 19.000 \text{ Jahre.} \end{aligned}$$

5. *(Hängebrücke/Stromleitung/Seilbahn.)*

Wie haben hier nicht genügend Hintergrund, um die sog. *Kettenlinie* herzuleiten. Darum nur die Angabe der Formel:



$$f(x) = \tfrac{1}{2}(a^x + a^{-x})$$

Die Basis a bestimmt, wie sehr die Kurve zwischen den (gleich hohen) Aufhängpunkten A,B „durchhängt“. (Eine Parabel steigt von unten her etwas schneller an.)

8.26 Die Eulersche Zahl e

Angenommen, Sie bekämen auf Ihr Anfangskapital k_0 100% Zinsen p.a. (vgl. 8.25.2):

$$k_1 = k_0 \cdot \left(1 + \frac{100}{100}\right) = k_0 \cdot 2\,.$$

Die Bank schlägt vor, stattdessen jedes halbe Jahr 50% zu zahlen. Ist das besser?

$$k_2 = k_0 \cdot \left(1 + \frac{50}{100}\right)^2 = k_0 \cdot 2.25 \quad \longrightarrow \text{ ja!}$$

Bei Verzinsung pro Quartal wäre das

$$k_4 = k_0 \cdot \left(1 + \frac{1}{4}\right)^4 \approx k_0 \cdot 2.44\,,$$

monatlich

$$k_{12} = k_0 \cdot \left(1 + \frac{1}{12}\right)^{12} \approx k_0 \cdot 2.613\,,$$

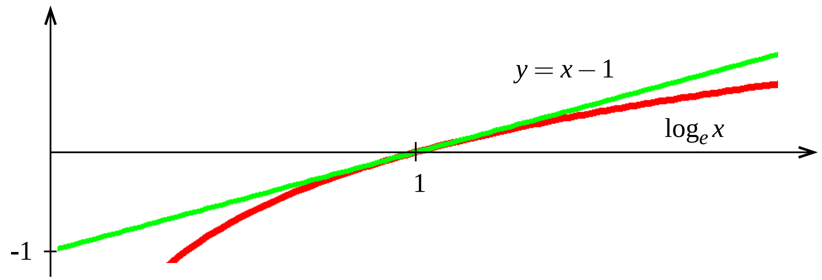
täglich

$$k_{365} = k_0 \cdot \left(1 + \frac{1}{365}\right)^{365} \approx k_0 \cdot 2.7146\,.$$

Könnten Sie so beliebig reich werden? *Nein*, es gibt eine Grenze:

$$\frac{k_n}{k_0} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \approx 2.7182818\ldots =: \mathbf{e} \qquad \text{für große } n.$$

e heißt **Eulersche Zahl**[26]. Sie ist die sog. *natürliche Basis* für Exponential- und Logarithmusfunktionen, weil sie als einzige Logarithmusfunktion u.a. folgende Eigenschaft hat: die Tangente an $\log_e$ in der Nullstelle 1 hat die Gleichung $y = x - 1$.



Dadurch gilt: $\log_e x \le x - 1$ für alle $x \in \mathbb{R}^+$ und wir bekommen

$$\log_e \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \overset{8.24\,(\mathrm{iv})}{=} n \cdot \log_e \left(1 + \frac{x}{n}\right) \le n \cdot \frac{x}{n} = x$$
$$\Leftrightarrow \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \le e^x\,,$$

wobei die Annäherung für große n immer besser wird. Für $x = 1$ ergibt sich unsere obige Schranke für die Zinseszinsen.
Der Logarithmus zur Basis e heißt der **natürliche Logarithmus** und hat einen eigenen Namen: $\log_e x =: \mathbf{ln}\, x$. Die Exponentialfunktion e^x heißt einfach **die e-Funktion**. Jede Exponential- und Logarithmusfunktion lässt sich mit Hilfe von e und ln schreiben:

$$\boxed{a^x \overset{8.24\,(\mathrm{i})}{=} (e^{\ln a})^x = e^{x \ln a} \qquad \log_a x \overset{8.24\,(\mathrm{v})}{=} \frac{\ln x}{\ln a}}\,.$$

$\longrightarrow$ *Aus diesem Grund wird in den meisten Anwendungen nur mit e^x und $\ln x$ gearbeitet.*

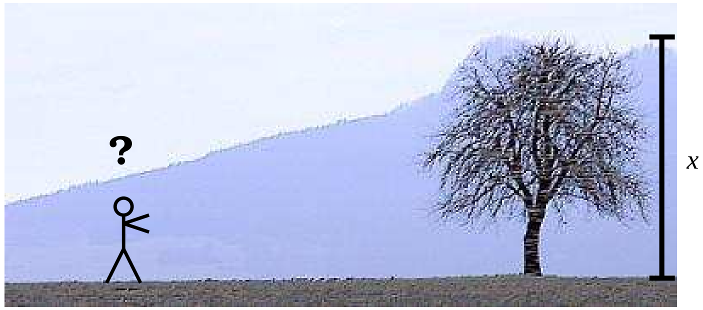
8.27 Aufgabe. (Übungen zu Exponential- und Logarithmusfunktionen.)

[26] Leonhard Euler, 1707–1783, schweizer Mathematiker

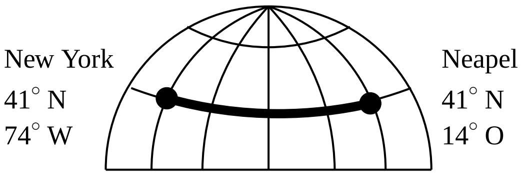
Winkelfunktionen

8.28 Weitere Problemstellungen

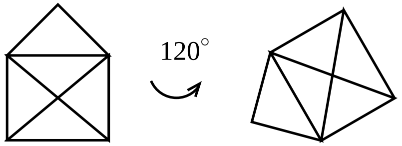
1. *Geometrie:* Wie hoch ist der Baum?



2. *Geodäsie:* Wie weit ist es von Neapel nach New York direkt, in Fluglinie bzw. entlang des Breitenkreises?



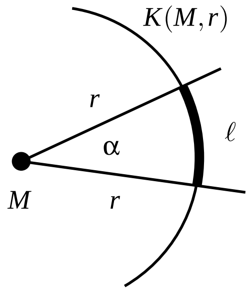
3. *Informatik:* Wie wird ein Objekt auf dem Bildschirm gedreht?



4. *Physik:* Welche Gemeinsamkeiten haben die Phänomene Schall, Wechselstrom, Licht, Seegang?

8.29 Winkelfunktionen

1. Es sei ein Punkt M und ein Kreis $K(M,r)$ mit Radius r gegeben. Weiter sollen zwei Strahlen in M beginnen und aus K ein Bogenstück ℓ ausschneiden. Der von diesen beiden Stahlen begrenzte **Winkel** α ist das Längenverhältnis von Bogenstück zu Radius:



$$\boxed{\alpha := \frac{\ell}{r}}\ .$$

Es ist für alle Kreise um M genau gleich groß.
Wir bezeichnen Winkel mit kleinen griechischen Buchstaben: $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ etc.

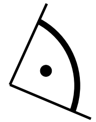
Für $r = 1$ entspricht der Winkel genau der Bogenlänge (ohne Einheit). Dies ist das sog. **Bogenmaß**. Alle natürlichen Winkel sind deshalb durch den Kreisumfang 2π beschränkt und haben Größen $\in [0, 2\pi[$.

Winkel werden auch im **Gradmaß** gemessen, 2π entsprechen 360°:

$$\boxed{\frac{\text{Gradmaß}}{360^\circ} = \frac{\text{Bogenmaß}}{2\pi}}\ .$$

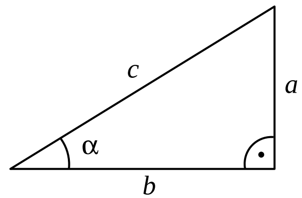
$\longrightarrow$ *Die Umrechnung erfolgt durch Auflösen nach einer der Größen.*

Der Winkel mit Größe $\frac{\pi}{2}$ heißt **rechter Winkel**. Er wird in Zeichnungen mit einem Innenpunkt markiert.



2. Um Strecken und Winkel rechnerisch in Beziehung zu setzen, definieren wir folgende **Winkelfunktionen**:

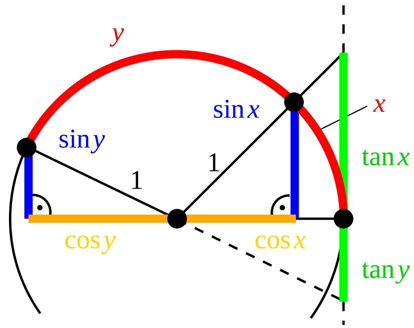
$$\boxed{\begin{aligned} \mathbf{sin}\,\alpha &:= \frac{a}{c} = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}} \\ \mathbf{cos}\,\alpha &:= \frac{b}{c} = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}} \\ \mathbf{tan}\,\alpha &:= \frac{a}{b} = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}} \end{aligned}}$$

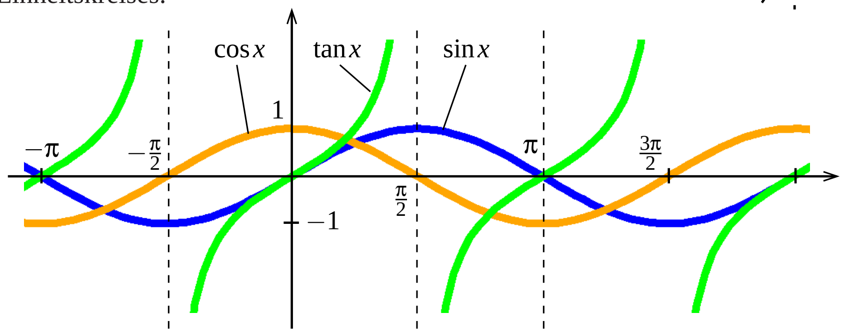


3. Winkelfunktionen als reelle Funktionen:

$$\mathbf{sin} : \mathbb{R} \to [-1,1]$$
$$\mathbf{cos} : \mathbb{R} \to [-1,1]$$
$$\mathbf{tan} : \mathbb{R} \setminus \{ \tfrac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \} \to \mathbb{R}$$

Das Argument x ist stets ein *Winkel im Bogenmaß*, d.h. ein Bogenstück des Einheitskreises.





8.30 Eigenschaften von Winkelfunktionen

$\longrightarrow$ *In diesem Unterpunkt stehen nur wichtige Ergebnisse. Die Beweise dazu sind nicht schwer und Sie machen Sie selbst in Aufgabe 8.32.*

1. Spezielle Werte:

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan x$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	–

2. Direkte Beziehungen:

$$\boxed{\begin{array}{lrcll} \text{(i)} & \sin(\frac{\pi}{2}-x) & = & \sin(x+\frac{\pi}{2}) & = \cos x \\ \text{(ii)} & \cos(\frac{\pi}{2}-x) & = & \cos(x-\frac{\pi}{2}) & = \sin x \\ \text{(iii)} & \sin^2 x+\cos^2 x & = & 1 & \textit{Pythagoras}^{27} \\ \text{(iv)} & \tan x & = & \dfrac{\sin x}{\cos x}\,. & \end{array}}$$

$\longrightarrow$ *Die Schreibweise* $\sin^2 x$ *ist eine Kurzform für* $(\sin x)^2$, nicht *für* $\sin(x^2)$.

3. *Periodizität:* $\sin x$, $\cos x$, $\tan x$ sind periodisch, d.h. für alle $k \in \mathbb{Z}$ gilt:

$$\boxed{\begin{array}{rcl} \sin(x+k\cdot 2\pi) & = & \sin x \\ \cos(x+k\cdot 2\pi) & = & \cos x \\ \tan(x+k\cdot \pi) & = & \tan x \end{array}}$$

4. sin und tan sind *ungerade*, cos ist *gerade*.

5. Um Größen von Winkeln zu berechnen, müssen wir die Winkelfunktionen umkehren, z.B.:

$$\sin x = \frac{1}{2} \;\Rightarrow\; x = \sin^{-1}\frac{1}{2} = \,?$$

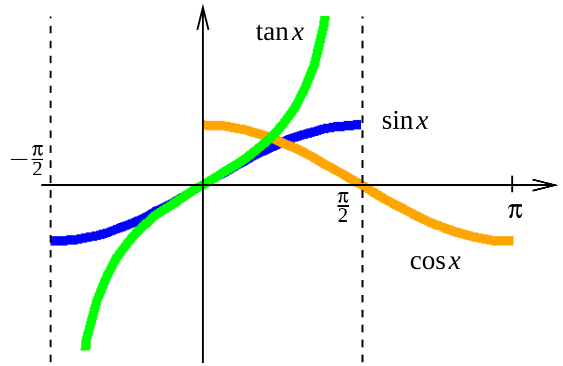
Die Umkehrfunktionen der Winkelfunktionen heißen **Arcusfunktionen** (von lat. *arcus* = Bogen), weil sie einen Winkel = Einheitskreisbogen zurückgeben:

$$\begin{array}{rl} \sin^{-1} & =: \textbf{arcsin} \\ \cos^{-1} & =: \textbf{arccos} \\ \tan^{-1} & =: \textbf{arctan}\,. \end{array}$$

$\longrightarrow$ *Auf manchen Rechnern heißen sie auch* asin, acos, atan.

Problem: Winkelfunktionen sind wegen der Periodizität nicht injektiv. Wir müssen sie injektiv machen und können sie dann auf ihrer jeweiligen Bildmenge umkehren.

[27] Pythagoras von Samos, ca. 570–510 v.Chr., griechischer Philosoph und Mathematiker



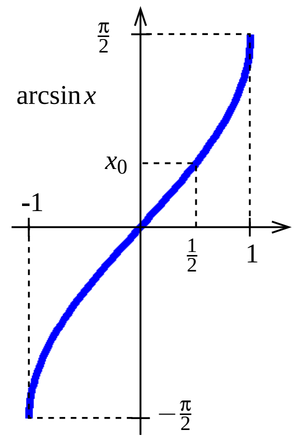
Die Winkelfunktionen sind streng monoton auf folgenden Intervallen:

$$\begin{array}{lll} \sin & \text{auf } [-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}] & \text{steigend} \\ \cos & \text{auf } [0,\pi] & \text{fallend} \\ \tan & \text{auf }]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[& \text{steigend.} \end{array}$$

Wir beschränken sie darauf und definieren:

$$\begin{array}{lcl} \arcsin: & [-1,1] \longrightarrow & [-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}] \\ \arccos: & [-1,1] \longrightarrow & [0,\pi] \\ \arctan: & \mathbb{R} \longrightarrow &]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[\,. \end{array}$$

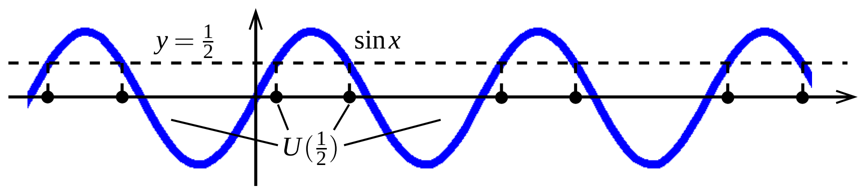
Innerhalb dieser Intervalle sind die Ergebnisse eindeutig und werden vom Taschenrechner so geliefert. Die Menge $U(y)$ aller Urbilder zum Wert y müssen wir durch bekannte Formeln finden. Beispiel:



$$\sin x = \frac{1}{2} \;\Rightarrow\; x_0 = \arcsin\frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}\,.$$

Die Beziehung $\sin(\pi-x)=\sin x$ liefert das zweite Urbild in der Periode:

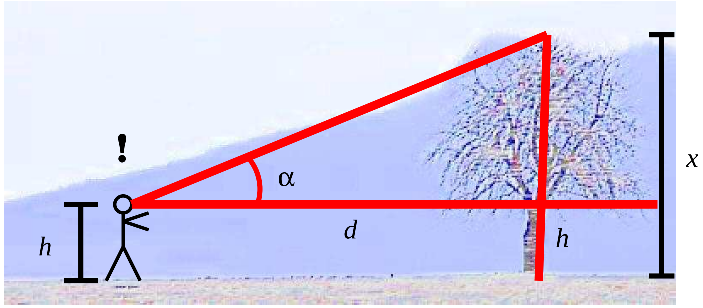
$$\begin{array}{rl} U(\frac{1}{2}) = & \{x_0+k\cdot 2\pi \mid k\in\mathbb{Z}\} \\ & \cup\,\{(\pi-x_0)+k\cdot 2\pi \mid k\in\mathbb{Z}\}\,. \end{array}$$



8.31 Anwendungen der Winkelfunktionen

Auflösung der Probleme 8.28:

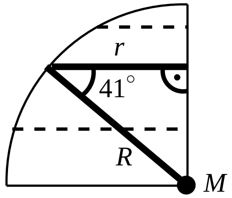
1. *(Geometrie)*
Wie hoch ist der Baum?



Sie messen auf Augenhöhe den Winkel α zur Baumspitze gegen die Horizontale und den Abstand d von Ihnen zum Baum. Ihre Augenhöhe h über dem Boden kennen Sie auch.

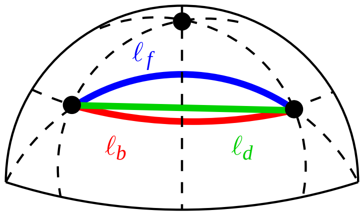
$$\frac{x-h}{d} \overset{8.29.2}{=} \tan\alpha \;\Leftrightarrow\; x = h + d\tan\alpha\,.$$

2. *(Geodäsie)*
Wie weit ist es von Neapel nach New York direkt, in Fluglinie bzw. entlang des Breitenkreises?



Breitengrade

Nordpol

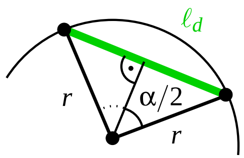


Äquator

Sei $R = 6370$ km der Erdradius. Der Radius r des 41. Breitenkreises beträgt $r = R\cos 41^\circ \approx 4807.5$ km. Auf diesem Kreis liegen die Städte um den Mittelpunktswinkel von $\alpha = 74^\circ + 14^\circ = 88^\circ$ versetzt. Die Länge ℓ_b des Breitenkreisbogens ist dieser Winkel im Bogenmaß:

$$\ell_b = r\cdot\frac{\pi}{180^\circ}\cdot\alpha \approx 7383.8 \text{ km}\,.$$

Die direkte (geradlinige) Entfernung ℓ_d ergibt sich aus folgender Idee: wir fällen das Lot vom Kreismittelpunkt auf die Strecke und sehen:



$$\ell_d = 2\cdot r\sin\frac{\alpha}{2} \approx 6679.1 \text{ km}\,.$$

Die Fluglinie ℓ_f ist die kürzeste Entfernung auf der Erdoberfläche, d.h. der Bogen eines Kreises um den Erdmittelpunkt M. Die Skizze bleibt gleich, jetzt ist M der Kreismittelpunkt. Der Radius wird ersetzt durch den Erdradius R und α durch den Winkel $\beta = \sphericalangle(\text{New York}, M, \text{Neapel})$. Für die bekannte Größe ℓ_d gilt dieselbe Formel wie mit den neuen Maßen:

$$\ell_d = 2R\sin\frac{\beta}{2} \;\Leftrightarrow\; \beta = 2\arcsin\frac{\ell_d}{2R} \approx 63.2^\circ\,.$$

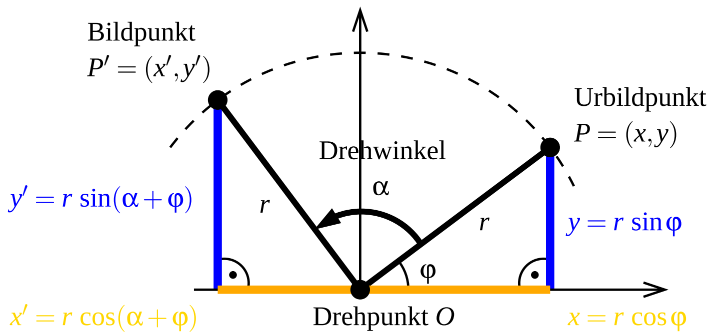
Die Bogenlänge ℓ_f ist wieder dieser Bogen β im Bogenmaß:

$$\ell_f = R\cdot\frac{\pi}{180^\circ}\cdot\beta \approx 7030.6 \text{ km}\,.$$

3. *(Informatik)*
Wie wird ein Objekt auf dem Bildschirm gedreht?

Ein graphisches Objekt besteht aus Punkten und Verbindungslinien zwischen ihnen. Es reicht, alle Punkte zu drehen und die Linien neu zu zeichnen. Dazu müssen wir (nur) verstehen, wie ein Punkt gedreht wird.

Gegeben: Urbildpunkt $P = (x,y)$, Drehpunkt und Drehwinkel α. Wir wählen den Drehpunkt als Ursprung O eines Koordinatensystems, in dem x,y Koordinaten sind. Der Bildpunkt P' habe die Koordinaten (x',y').



Zunächst transformieren wir P in **Polarkoordinaten** (r,φ), d.h. in eine parametrische Darstellung durch den Abstand r vom Ursprung und den von der Strecke $\overline{OP}$ mit der positiven x-Achse eingeschlossenen Winkel φ:

$$\boxed{\left.\begin{aligned} x &= r\cos\varphi \\ y &= r\sin\varphi \end{aligned}\right\} \;\Leftrightarrow\; \left\{\begin{aligned} r &= \sqrt{x^2+y^2} \\ \varphi &= \arctan\tfrac{y}{x} \end{aligned}\right.} \qquad \begin{aligned} &\leftarrow \textit{Pythagoras} \\ &\leftarrow \textit{Def. tan: 8.29.2} \end{aligned}$$

Der Bildpunkt P' hat denselben Abstand r vom Ursprung und den um α vergrößerten Polarwinkel $\alpha+\varphi$. Wie hängt P' von P und α ab?

Die Antwort liefern die sog. **Additionstheoreme** der Winkelfunktionen (ohne Beweis):

$$\begin{aligned} \sin(\alpha+\varphi) &= \sin\alpha\,\cos\varphi+\cos\alpha\,\sin\varphi \\ \cos(\alpha+\varphi) &= \cos\alpha\,\cos\varphi-\sin\alpha\,\sin\varphi\,. \end{aligned}$$

Damit und der obigen Darstellung von x,y erhalten wir:

$$\begin{aligned} x' &= r\,\cos(\alpha+\varphi) \\ &= r\,(\cos\alpha\,\cos\varphi-\sin\alpha\,\sin\varphi) \\ &= (r\,\cos\varphi)\,\cos\alpha-(r\,\sin\varphi)\,\sin\alpha \\ &= x\cos\alpha-y\sin\alpha\,, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y' &= r\,\sin(\alpha+\varphi) \\ &= r\,(\sin\alpha\,\cos\varphi+\cos\alpha\,\sin\varphi) \\ &= (r\,\cos\varphi)\,\sin\alpha+(r\,\sin\varphi)\,\cos\alpha \\ &= x\sin\alpha+y\cos\alpha\,. \end{aligned}$$

Das ist eine Abbildung $\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ mit der Vorschrift

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

4. *(Physik)*

   Welche Gemeinsamkeiten haben die Phänomene Schall, Wechselstrom, Licht, Seegang?

   Antwort: Es sind alles Wellen, die geeignet durch die Winkelfunktionen modelliert werden können. Z.B. hat die Spannung im Haushaltsnetz die Zeitformel

   $$U(t) = 311.127\,\mathrm{V}\cdot\sin 50t\,.$$

   Im allgemeinen hat eine Wellenfunktion drei Parameter:

   $$f(t) = a\sin\omega(t-\varphi)\,.$$

   Der Faktor a heißt die **Amplitude**, der Faktor ω die **Winkelfrequenz** und der Summand φ die **Phase** der Welle. Schall, Licht und Seegang sind Gemische von Wellen mit verschiedenen Parameterwerten, d.h. Summen mit vielen solchen Termen.

8.32 Aufgabe. (Übungen zu Winkelfunktionen.)

Sonstige Funktionen

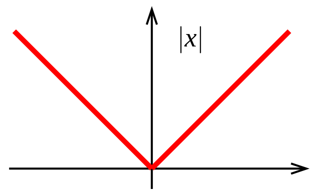
$\longrightarrow$ *Es gibt einige weitere gebräuchliche Funktionen, die auch in der Informatik von Bedeutung sind.*

8.33 Betragsfunktion

Häufig spielt die absolute Größe einer Zahl eine Rolle, unabhängig von ihrem Vorzeichen. Das Vorzeichen lässt sich ignorieren mit Hilfe der **Betragsfunktion**:

$$|\cdot|:\mathbb{R}\to\mathbb{R}_0^+\,,$$

$$|x| := \begin{cases} x & \text{für } x\geq 0 \\ -x & \text{für } x<0\,. \end{cases}$$



Beispiel 1: Der Abstand $\mathrm{dist}:\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}_0^+$ zwischen zwei reellen Zahlen x,y ist ein Maß für ihre Entfernung voneinander auf der reellen Achse. Er soll nichtnegativ und *symmetrisch* sein, d.h.

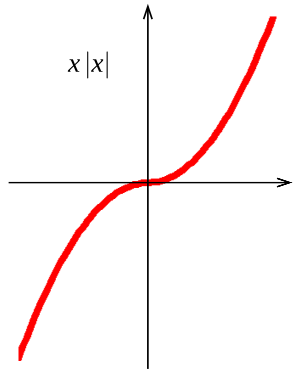
$$\mathrm{dist}(x,y) = \mathrm{dist}(y,x) \geq 0 \quad \text{für alle } x,y\in\mathbb{R}\,.$$

Definiere dist mit Hilfe der Betragsfunktion: $\mathrm{dist}(x,y) := |x-y|\,.$

Beispiel 2: Konstruiere eine ungerade quadratische Parabel

$$\begin{aligned} q(x) &= \begin{cases} x^2 = x\cdot x & \text{für } x\geq 0 \\ -x^2 = -x\cdot x & \text{für } x<0 \end{cases} \\ &= |x|\cdot x\,. \end{aligned}$$

Für die Fallunterscheidung im ersten Faktor wird die Betragsfunktion eingesetzt.



Wichtigste Eigenschaften für alle $x,y\in\mathbb{R}$:

$\lvert -x\rvert = \lvert x\rvert$	*Geradheit*
$\lvert x\cdot y\rvert = \lvert x\rvert\cdot\lvert y\rvert$	*Homogenität*
$\lvert x+y\rvert \leq \lvert x\rvert+\lvert y\rvert$	*Dreiecksungleichung*
$\lvert x\rvert = 0 \;\Leftrightarrow\; x=0$	*Definitheit.*

Der Betrag ist nicht bijektiv, das Auflösen einer Betragsgleichung führt im allgemeinen zu einer Fallunterscheidung:

$$|x| = a \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \text{keine Lösung} & \text{für } a < 0 \\ x = 0 & \text{für } a = 0 \quad \text{(Definitheit)} \\ x = a \ \vee \ x = -a & \text{für } a > 0\,. \end{cases}$$

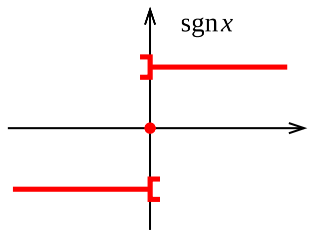
Null spielt beim Betrag also eine Sonderrolle: nur für den Wert $a = 0$ ist die Auflösung eindeutig.

8.34 Signum-Funktion

Umgekehrt lässt sich die Größe von $x \in \mathbb{R}$ ignorieren und nur das Vorzeichen „extrahieren" mit Hilfe der **Signum-Funktion**:

$$\mathbf{sgn} : \mathbb{R} \to \{-1, 0, 1\}\,,$$

$$\operatorname{sgn} x := \begin{cases} 1 & \text{für } x > 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \\ -1 & \text{für } x < 0\,. \end{cases}$$



Beispiel 3: Jede Zahl $x \in \mathbb{R}$ hat die Produktdarstellung $\boxed{x = \operatorname{sgn} x \cdot |x|}$.

$\longrightarrow$ *Das ist das eindimensionale Analogon zu* Länge *und* Richtung *bei Vektoren.*

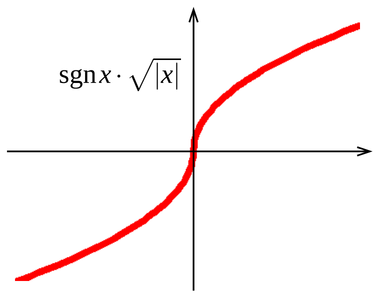
Nachweis:

$$\operatorname{sgn} x \cdot |x| = \left\{ \begin{array}{ccc l} 1 & \cdot & x & \text{für } x > 0 \\ 0 & \cdot & 0 & \text{für } x = 0 \\ (-1) & \cdot & (-x) & \text{für } x < 0 \end{array} \right\} = x\,.$$

Beispiel 4: Umkehrfunktion der ungeraden quadratische Parabel:

$$q^{-1}(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & \text{für } x \geq 0 \\ -\sqrt{-x} & \text{für } x < 0 \end{cases}$$

$$= \operatorname{sgn} x \cdot \sqrt{|x|}\,.$$



Wichtigste Eigenschaften für alle $x, y \in \mathbb{R}$:

$\operatorname{sgn}(-x) = -\operatorname{sgn} x$	*Ungeradheit*
$\operatorname{sgn}(x \cdot y) = \operatorname{sgn} x \cdot \operatorname{sgn} y$	*Homogenität.*

8.35 Minimum- und Maximumfunktion

Eine Menge M reeller Zahlen ist immer *angeordnet*, d.h. je zwei Elemente x, y sind nach Größe vergleichbar: $x < y$. Die **Minimum-Funktion** liefert die kleinste Zahl in M, wenn sie existiert:

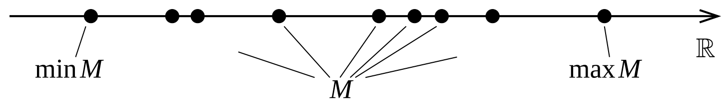
$$\mathbf{min} : \mathcal{P}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$$

$$\min M := \begin{cases} m_0 & \text{falls } \exists m_0 \in M : \forall m \in M : m_0 \leq m \\ -\infty & \text{sonst.} \end{cases}$$

Der Wert $-\infty$ ist keine reelle Zahl, sondern steht für eine Größe, die im Vergleich immer die kleinere ist: $\forall r \in \mathbb{R} : -\infty < r$.
Analog ist die **Maximum-Funktion** definiert, wobei $\forall r \in \mathbb{R} : \infty > r$:

$$\mathbf{max} : \mathcal{P}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$$

$$\max M := \begin{cases} m_0 & \text{falls } \exists m_0 \in M : \forall m \in M : m_0 \geq m \\ \infty & \text{sonst.} \end{cases}$$



Die reelle Menge M im Argument kann sehr verschieden aussehen. Im Bild ist eine *diskrete* Menge gezeigt, die aus einzelnen Zahlen besteht. Für solche Mengen existieren Minimum und Maximum immer. Ebenso für sehr viele *kontinuierliche* Mengen, etwa abgeschlossene Intervalle $[a, b]$.
Die Fallunterscheidung führt offenbar dann zu $\pm\infty$, wenn M leer ist oder eine unbeschränkte Teilmenge enthält, z.B. $M \supseteq]-\infty, b]$ oder $M \supseteq \mathbb{N}$. Sie kann aber auch für beschänkte Mengen eintreten, z.B. für das offene Intervall $]a, b[$. Die Grenzen a, b sind die einzigen Zahlen m_0, die die Bedingungen „$m_0 \leq m$" bzw. „$m_0 \geq m$" erfüllen könnten. Sie liegen aber nicht in M und verletzen die Bedingung „$\exists m_0 \in M$".

$\longrightarrow$ *Es ist möglich, Funktionen zu definieren, die in diesem Fall die Grenzen ausgeben. Dazu brauchen wir erst den Begriff des* Grenzwerts, *siehe* **??.??**.

Elemente einer aufzählbaren Menge werden auch als Einzelargumente geschrieben:

$$\begin{aligned} \min(3, 7) &:= \min\{3, 7\} &&= 3 \\ \max(2, 4, 6, \ldots, 20) &:= \max\{2, 4, 6, \ldots, 20\} &&= 20\,. \end{aligned}$$

Wichtigste Eigenschaften, wenn $\min M$, $\min N \neq -\infty$ bzw. $\max M$, $\max N \neq \infty$ sind:

$$\begin{aligned} \min(M\cup N) &= \min(\min M, \min N) \\ \max(M\cup N) &= \max(\max M, \max N) \\ M\subseteq N &\Rightarrow \min M \geq \min N\,,\quad \max M \leq \max N\,. \end{aligned}$$

$\longrightarrow$ *Es gibt keine analoge Regel für* $\min/\max(M\cap N)$ *. Das zeigen Sie in Aufgabe 8.38.*

Beispiel 5: Viele Anwendungsprobleme lassen sich als Extremwertaufgaben unter Nebenbedingungen formulieren, z.B. *kürzeste Weglänge:*

$$\min\{\,\text{Länge}(w)\mid w \text{ Straßenverbindung zwischen Berlin und Potsdam}\,\}\,.$$

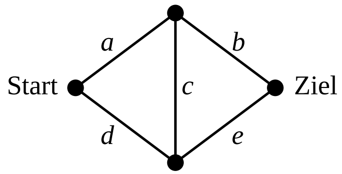
Oft ist nicht nur der Wert selbst, sondern ein ihn annehmendes Urbild gesucht, z.B. ein *kürzester Weg*. Dieses liefert die Funktion

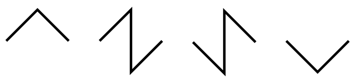
$$\textbf{argmin}\,\{\,\text{Länge}(w)\mid w \text{ Straßenverbindung zwischen Berlin und Potsdam}\,\}\,.$$

Im allgemeinen erhalten wir zu einer Bewertungsfunktion f die Menge

$$\operatorname{argmin} f(M) = \{\,x\in M \mid f(x)=\min f(M)\,\}\,.$$

Sie ist genau dann leer, wenn $\min f(M) = -\infty$ ist.
Kleines Beispiel aus 6.10.4:





$M := \{\,\{a,b\},\ \{a,c,e\},\ \{b,c,d\},\ \{d,e\}\,\}$

Wenn die Strecken a,b,c,d,e alle Länge 1 haben, ist die Längenfunktion

$$f: M\to\mathbb{R}\,,\quad f(X) = |X|\,.$$

X ist dabei eine Menge aus der Familie M und $|X|$ die Anzahl Strecken in X. Damit erhalten wir:

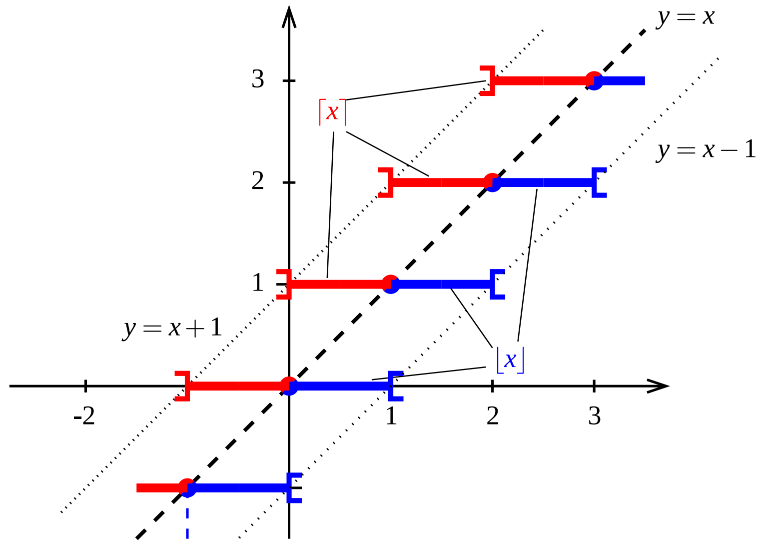
$$\begin{aligned} \min f(M) &= \min\{\,|\{a,b\}|,\ |\{a,c,e\}|,\ |\{b,c,d\}|,\ |\{d,e\}|\,\} \\ &= \min\{\,2,\,3,\,3,\,2\,\} \\ &= 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \operatorname{argmin} f(M) &= \{\,X\in M \mid f(X) = \min f(M) = 2\,\} \\ &= \{\,\{a,b\},\ \{d,e\}\,\}\,. \end{aligned}$$

8.36 Rundungsfunktionen

Für die Konversion reeller zu ganzen Zahlen müssen wir den „Nachkommateil" abtrennen. Dies tun zwei **Rundungsfunktionen**:

$$\begin{aligned} \lfloor\cdot\rfloor:\mathbb{R}\to\mathbb{Z}\,,\ \lfloor x\rfloor &:= \max\{\,n\in\mathbb{Z}\mid n\leq x\,\} &&\textit{Abrundung} \\ \lceil\cdot\rceil:\mathbb{R}\to\mathbb{Z}\,,\ \lceil x\rceil &:= \min\{\,n\in\mathbb{Z}\mid n\geq x\,\} &&\textit{Aufrundung.} \end{aligned}$$



Beispiel 6: $\text{Anz}(x) = \lfloor \log_{10} x + 1\rfloor$, siehe 8.25.3.

Beispiel 7 (Schubfachprinzip): Verteilt man n Objekte auf m Schubfächer, so enthält mindestens ein Schubfach $\geq \lceil \frac{n}{m}\rceil$ Objekte. Z.B. 366 mögliche Geburtstage von 3.416.000 Berlinern (Stand 2008): es gibt mindestens einen Tag im Jahr, an dem $\geq \lceil\frac{3.416.000}{366}\rceil = 9.334$ Berliner gemeinsam Geburtstag haben.
Wichtigste Eigenschaften für alle $x,y\in\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} &x-1 < \lfloor x\rfloor \leq x \leq \lceil x\rceil < x+1 && \text{für alle } x\in\mathbb{R} \\ &\lfloor x+n\rfloor = \lfloor x\rfloor + n \quad\text{und}\quad \lceil x+n\rceil = \lceil x\rceil + n && \text{für alle } n\in\mathbb{Z} \\ &\lfloor x\rfloor = x \ \Leftrightarrow\ x\in\mathbb{Z} \ \Leftrightarrow\ \lceil x\rceil = x\,. \end{aligned}$$

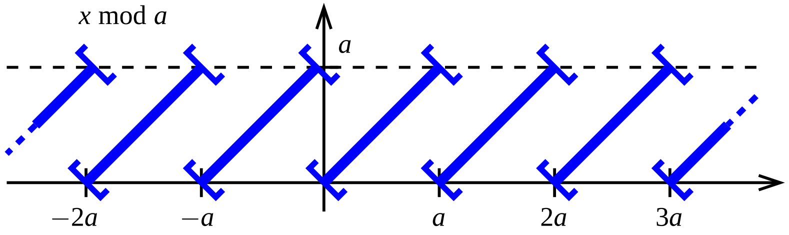
Achtung: auf vielen Rechnern sind die Rundungen abweichend als ungerade Funktionen implementiert:

$$\lfloor x\rfloor_{\text{Rechner}} = \operatorname{sgn} x\cdot\lfloor |x|\rfloor \qquad\qquad \lceil x\rceil_{\text{Rechner}} = \operatorname{sgn} x\cdot\lceil |x|\rceil\,.$$

8.37 Modulofunktion

Wenn eine Division nicht aufgeht, bleibt ein Rest. Diesen berechnet die **Modulo-Funktion** (von lat. *modulus:* Rest):

$$\mathbf{mod} : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}_0^+ , \quad x \bmod a \; := \; x - \left\lfloor \frac{x}{a} \right\rfloor a \, .$$



Beispiel 8: Ein Stundenzeiger zeigt alle 12 Stunden auf dieselbe Zahl. Zeigt er jetzt auf 4 Uhr, so zeigt er in 100 Stunden auf

$$(4+100) \bmod 12 \; = \; 104 - \left\lfloor \frac{104}{12} \right\rfloor \cdot 12 \; = \; 104 - 8 \cdot 12 \; = \; 8 \text{ Uhr.}$$

Beispiel 9: einfache vs. doppelte Indizierung einer Matrix.
Im Rechner ist der Speicher linear angeordnet, sodass man die doppelte Indizierung (i, j) einer $m \times n$-Matrix auf eine lineare Adressierung $0, \ldots, mn-1$ der Datenfelder abbilden muss. Hier eine 4×4-Matrix, in die die linearen Adressen m_{ij} eingetragen sind:

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} j= 0 & 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{array}{c} i=0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \\ 8 & 9 & 10 & 11 \\ 12 & 13 & 14 & 15 \end{pmatrix} \end{array} = (m_{ij})_{ij} \qquad \begin{aligned} m_{ij} &= 4i + j \\ \\ i &= \left\lfloor \tfrac{m_{ij}}{4} \right\rfloor \\ j &= m_{ij} \bmod 4 \end{aligned}$$

Die Formeln rechts geben die beiden Transformationen an.

Wichtigste Eigenschaften für alle $x, y \in \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$:

$$\boxed{\begin{aligned} 0 \; \leq \; & x \bmod a \; < \; a \\ (x \pm y) \bmod a \; &= \; [(x \bmod a) \pm (y \bmod a)] \bmod a \\ (x \cdot y) \bmod a \; &= \; [(x \bmod a) \cdot (y \bmod a)] \bmod a \end{aligned}}$$

8.38 Aufgabe. (Übungen zu sonstigen Funktionen.)